УДК 517. 928 ***Алымкулов К.*** *– д.ф.-м.н., проф. ОшГУ,* ***Абдуллаева Ч.Х.*** *– д.ф.-м.н., ст. преп. КУУ*

Alymkulov K., Abdullaeva Ch.KH.

МЕТОД УНИФОРМИЗАЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТИ

ИРРАЦИОНАЛДУУ ӨЗГӨЧӨ УЧУРДА КАДИМКИ ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТТҮҮ СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИН ТАБУУГА УНИФОРМИЗАЦИЯ МЕТОДУН КОЛДОНУУ

BY METHOD OF UNIFORMIZATION IS CONSTRUCTED THE ASYMPTOTICAL OF THE SINGULAR PERTURBED NONLINEAR DIFFERENTIALLY EDUCATION WHEN CORRESPONDING EDUCATION HAVE REGULAR SINGULAR POINT

В статье методом униформизации [1] строится асимптотика решения сингулярного возмущенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее уравнение имеет регулярную особую точку.

Ключевые слова: асимптотический ряд, регулярная особая точка, метод униформизации, сингулярное возмущенное уравнение.

Бул макалада кадимки өзгөчө чекиттүү сингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чечимин табууга униформизация [1] методун колдонуу каралган.

Урунттуу сөздөр: асимптотикалык катар, регулярдуу өзгөчө чекит, униформизация методу, сингулярдуу козголгон теңдеме.

By method of uniformization is constructed the asymptotical of the singular perturbed nonlinear differentially education when corresponding education have regular singular point.
Keywords: asymptotic series, the regular singular point, method of uniformization, the singularly perturbed equation.

Рассматривается задача Коши [2]:

$u(1) = u^{(0)}, u'(1) = u^{(1)}$ (1)

для уравнения

$(x+\varepsilon u'(x)u''(x)+q(x)u'(x)+p(x)u(x)=r(x)$ (2)

где $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ - заданные постоянные, $0< \varepsilon<<1$-малый параметр, $x\in[0,1]$– независимая переменная , $p(x),q(x),r(x) \in C[0,1]$, $u(x)$ - неизвестная функция.

Для невозмущенной задачи (2) имеем:

$Lu_0(x)=xu''(x)+q(x)u'_0(x)+p(x)u_0(x)=r(x)$ (3)

$u_0(1) = u^{(0)}, u_0'(1) = u^{(1)}$ (4)

Точка x=0 является регулярной особой точкой.

Мы будем предполагать, что $q(0)=q_0>1$ является иррациональной точкой. Тогда однородное уравнение, соответствующее к уравнению (3) имеет двух линейно независимых решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ таких что:

$\varphi_1(1)=1, \varphi_1(1)=0, \varphi_2(1)=0, \varphi_2(1)=1$ (5.1)

$\varphi_1(x)\sim A_0 õ^{1-e}{}_0, \varphi_2(õ) \sim B_0=const, x\to 0.$ (5.2),

Общее решение уравнения (3) запишется в виде [3]:

$$u_0(x) = u^{(0)}\varphi_1(x) + u^{(1)}\varphi_2(x) + \int_1^x W^{-1}(x)\left[\varphi_2(x)\varphi_1(s) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)\right]r(s)ds \qquad (6)$$

гдеW(x)–вронскиан решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Из формулы Лиувилля имеем

$$W(x) = \exp\left\{-\int_1^x q(s)s^{-1}ds\right\} = x^{-q0}P(x), \qquad (7)$$

где

$$P(x)=\exp\left\{\int_1^x \frac{q_0-q(s)}{s}ds\right\}\in C^\infty[0,1].$$

Из (5.2) и (7) вытекает, что:

$u_0(x)=x^{1-q_0}a(x)+b(x)$ (8)

$u_0'(x)=x^{1-q_0}d(x)+e(x)$ (9)

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$,$(1-q_0)a(x)$,$d(x)$,$e(x)\in C^\infty[0,1]$ - известные функции. Будем предполагать, что $c(0)=c_0\neq 0$. Если искать решение задачи (1), (2) методом классического малого параметра, т.е. в виде:

$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2 u_2(x)+\ldots+\varepsilon^n u_n(x)+\ldots$ (10)

то, для определения неизвестных функции $u_n(x)$ $(n=1,2,...)$ получим уравнения:

$Lu_1=-u'_0u''_0(x)$, $u(1)=u'(1)=0$ (11.1)

$Lu_2=-u'_0u''_1(x)-u''_0(x)\,u'_1(x)$, , $u_2(1)=u'_2(1)=0$ (11.2)

……………………………………………………………………………………

$Lu_n=-\sum u'_i(x)u''_j(x)$, $u_n(1)=u'_n(1)=0$ (11.*n*)

…………………………………………………

В силу (8) и(9) уравнение (11.1) можно записать в виде

$Lu_1(x)=x^{-2q_0-1}a_0(x)+x^{-q_0-1}a_1(x)+a_2(x)=r_1(x)$ (12.1)

где $a_0(x)$,$a_1(x)\in C^\infty[0,1]$.

Далее, через $a_j(x)$ обозначим функции из класса $C^\infty[0,1]$. Из (12.1) используя формулу (6) получим:

$u_1(x)=x^{-2q_0}a_0(x)+x^{-q_0}a_1(x)+x^{-q_0-1}\ln x\,a_2(x)+a_3(x)$. (13.1)

Используя (8),(9),(13.1), уравнение (11.2) для определения $u_2(x)$ запишем в виде:

$Lu_2(x)=x^{-3q_0-2}a_0(x)+x^{-2q_0-2}a_1(x)+x^{-2q_0}1\ln(x)a_2(x)+x^{-q_0-2}a_3(x)+$

$+x^{-q_0-1}\ln x\,a_4(x)+a_5(x)=r_3(x)$ (12.2)

Отсюда для $u_2(x)$ получим выражение:

$u_2(x)=x^{-3q_0-1}a_0(x)+x^{-2q_0-1}a_1(x)+x^{-2q_0}\ln x\,a_2(x)+x^{-q_0}\ln x\,a_3(x)+$

$+x^{-q_0+1}\ln^2 x\,a_4(x)+a_5(x)$. (12.3)

С учетом (8), (13.1), (13.2) уравнение для определения функции $u_3(x)$ запишется в виде:

$Lu_3(x)=x^{-4q_0-3}a_0(x)+x^{-3q_0-3}a_1(x)+ x^{-2q_0-3}a_3(x)+ x^{-3q_0-2}\ln x\ a_4(x)+ x^{-3q_0-1}\ln^2 x\ a_5(x)+ x^{-q_0-3}\ a_6(x)+ x^{-q_0-2}\ln x\ a_7(x) + x^{-q_0-1}\ln^2 x\ a_8(x)+ a_7(x) =r_3(x)$, $a_k(x)\in C^\infty[0,1]$.

Интегрируя это уравнение получим:

$u_3(x)=x^{-4q_0-2}[a_0(x)+x^{q_0}(a_1(x)+x\ln x\ a_2(x))+ x^{2q_0}(a_3(x)+x\ln x\ a_4(x)+ x^2\ln^2 x\ a_5(x))+ x^{3q_0}(a_6(x)+x\ln x\ a_7(x)+ x^2\ln^2 x\ a_8(x)+ x^3\ln^3 x\ a_9(x)+ x^{4q_0}(a_{10}(x)]$, $a_k(x)\in C^\infty[0,1]$.

Далее, методом полной математической индукции, имеем:

$u_n(x)=x^{-(n+1)q_0-n+1}[a^{(n,0,0,0)}(x)+x^{q_0}(a^{(n,1,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,1,1,1)}(x)+ x^{2q_0}(a^{(n,2,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,2,1,1)}(x)+ x^2\ln^2 x\ a^{(n,2,2,2)}(x)+\ldots+ x^{nq_0}(a^{(n,n,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,n,1,1)}(x)+\ldots+ x^n\ln^n x\ a^{(n,n,n,n)}(x))+ x^{(n+1)q_0+n-1}(a^{(n,n+1,n-1,0)}(x)]$, $(n=1,2,3,\ldots)$ (12.n)

Отметим, что $a^{(n,m,s,v)}(x)\in C^\infty[0,1]$. и индексы n,m,s,v соответственно указывает номер функции $u_n(x)$, m-степень при x^q, s–также степень x, v–степень $\ln(x)$.

Поэтому решение (10) запишется в виде:

$$u_n(x,\varepsilon)=x^{1-q_0}\{a_0(x)+x^{q_0}b_0(x)+ \varepsilon x^{-1-q_0}\ [a^{(1,0,0,0)}(x)+ x^{q_0}\ a^{(1,1,0,0)}(x)+$$
$$+x\ln x\ a^{(1,1,1,1)}(x)]+ (\varepsilon x^{1-q_0})^2[a^{(2,0,0,0)}(x)+x^{q_0}\ (a^{(2,1,1,0)}\ (x)+$$
$$+x\ln x\ a^{(2,1,1,1)}(x)+ x^{2q_0}\ (a^{(2,2,0,0)}\ (x)+x\ln x\ a^{(2,1,1,1)}(x)+ x^2\ln^2 x\ a^{(2,2,2,2)}(x))]+$$
$$+\ldots+ (\varepsilon x^{-1-q_0}\ )^n\ [(a^{(n,0,0,0)}(x)+ x^{q_0}\ (a^{(n,1,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,n,0,0)}(x)+$$
$$+x^{2q_0}\ (a^{(n,2,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,2,1,1)}(x)+x^2\ln^2 x\ a^{(n,2,2,2)}(x))+\ldots +$$
$$+x^{nq_0}\ (a^{(n,n,0,0)}(x)+x\ln x\ a^{(n,n,1,1)}(x)+\ldots+x^n\ln^n x\ a^{(n,n,n,n)}(x))+$$
$$+x^{(n+1)q_0+n+1}a^{(n,n+1,n-1,0)}(x)]+ \ldots\}. \qquad (14)$$

Из (14) вытекает следующая

Теорема 1. Асимптотический ряд (10) или (14) полученный методом классического малого параметра является асимптотическим рядом только на отрезке $[\varepsilon^\beta,1]$, $0< \beta<(q_0+1)^{-1}$.

Полное доказательство этой теоремы можно доказать методом мажорант.

Таким, образом классическим методом малого параметра нельзя получить на всем отрезке [0,1].

Чтобы получить решение задачи (1)-(12) отрезке [0,1] используем метод униформизации (т.е. параметризации).

Запишем уравнение (1) в виде системы:

$u'_1(x) = z$, $u(1)=u_0$

$(x+\varepsilon z)z'(x)=-q(x)z(x)-p(x)u(x)+r(x)$, $u_1(1)=u_1^{(1)}$

Эту систему униформизируем следующим образом

$\xi du/d\xi = x(\xi)+\varepsilon z(\xi)$;

$$\xi\frac{dz}{d\xi} = -q(x(\xi))z(\xi) - p(x(\xi))u(\xi) + r(x(\xi)), \quad z(1) = z^{(1)}; \qquad (15)$$

$$\xi\frac{dx}{d\xi} = x(\xi) + \varepsilon z(\xi), \qquad x(1) = 1,$$

где $\xi\in[\xi_0(\varepsilon),1]$, $\xi_0(\varepsilon)>0$ при малом $\varepsilon>0$.

Если

$x(\xi)+\varepsilon z(\xi)\neq 0$, $\xi\in[\xi_0(\varepsilon),1]$, (16)

то система (15) эквивалентна к уравнению (16).

Решение системы (15) ищем в виде:

$$u(\xi)=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+..+\varepsilon^n u_n(\xi)+\ldots$$

$$z(\xi)=z_0(\xi)+\varepsilon z_1(\xi)+\varepsilon^2 z_2(\xi)+..+\varepsilon^n z_n(\xi)+\ldots \qquad (17)$$

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+..+\varepsilon^n x_n(\xi)+\ldots$$

Подставляя ряд (17) в (15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим:

$$\frac{du_0}{d\xi} = z_0(\xi), \qquad u_0(1) = u^{(0)},$$

$$\xi\frac{dz_0}{d\xi} = -q(\xi)z_0(\xi) - p(\xi)u_0(\xi) + r(\xi), \qquad z_0(1) = u^{(1)}, \qquad (18.0)$$

$$\xi\frac{du_1}{d\xi} = \xi z_1(\xi) + z_0{}^2(\xi) + x_1(\xi)z_0(\xi), \qquad u_1(1) = 0,$$

$$\xi\frac{d\vartheta_1}{d\xi} = -q(\xi)z_1(\xi) - p(\xi)u_1(\xi) + r(\xi) - q'(\xi)x_1(\xi)z_0(\xi) - p'(\xi)x_1(\xi)u_0(\xi) +$$
$$+r'(\xi)x_1(\xi), \qquad z_1(1) = 0,$$

$$\xi\frac{dx_1(\xi)}{d\xi}=x_1(\xi)+z_0(\xi),\qquad x_1(1)=0,\tag{18.1}$$

$$\xi\frac{du_2}{d\xi}=\xi z_2(\xi)+x_2(\xi)z_0(\xi)+2z_0z_1+x_1z_1,$$

$$\xi\frac{dz_2}{d\xi}=-q(\xi)z_2-p(\xi)u_2-q'(\xi)x_2z_0-p'(\xi)x_2u_0+q'(\xi)x_1z_1-\frac{q''(\xi)}{2}x_1^{\,2}z_0-$$

$$-p'(\xi)x_1u_1-\frac{p''(\xi)}{2}x_1^{\,2}u_0+r'(\xi)x_2+\frac{r''(\xi)}{2}x_1^{\,2},$$

$$\xi\frac{dx_2}{d\xi}=x_2(\xi)+z_1,\tag{18.2}$$

$$\xi\frac{du_3}{d\xi}=\xi z_3(\xi)+x_3(\xi)z_0(\xi)+2z_0z_2+x_1z_2+x_2z_1,\qquad u_3(1)=0,$$

$$\xi\frac{d\vartheta_3}{d\xi}=-q(\xi)z_3-p(\xi)u_3-q'(\xi)(x_1z_2+x_2z_1+x_3z_0)-p'(\xi)(x_1u_2+x_2u_1+x_3u_0)-$$

$$-\frac{q''(\xi)}{2}(x_1^{\,2}z_1+2x_1x_2z_0)-\frac{p''(\xi)}{2}(x_1^{\,2}u_1+2x_1x_2u_0)-\frac{q'''(\xi)}{3!}x_1^{\,3}z_0-\frac{p'''(\xi)}{3!}x_1^{\,3}u_0,\ z_3(1)=0,$$

$$\xi\frac{dx_3}{d\xi}=x_3(\xi)+z_2,\qquad x_3(1)=0,\tag{18.3}$$

………………………………………………

Уравнение (18.0) эквивалентно уравнению (3) по переменной ξ, поэтому:

$u_0(\xi)\sim a_0\xi^{1-q_0}$, $\upsilon_0=u'_0(\xi)\sim b_0\xi^{-q_0}$, $\xi\to0$.

Учитывая эту асимптотику функций

$u_0(\xi),u'_0(\xi)$, при $\xi\to0$ из (18.1),(18.2),(18.3) получим:

$u_1(\xi)\sim a_1\xi^{-2q_0}$, $z_1(\xi)\sim b_1\xi^{-2q_0}$, $x_1(\xi)\sim c_1\xi^{-q_0}$, $(c_1=b_0/(1+q_0))$

$u_2(\xi)\sim a_2\xi^{-3q_0}$, $z_2(\xi)\sim b_2\xi^{-3q_0}$, $x_2(\xi)\sim c_2\xi^{-2q_0}$,

………………………………………………………

$u_n(\xi)\sim a_n\xi^{-nq_0}$, $z_n(\xi)\sim b_n\xi^{-nq_0}$, $x_n(\xi)\sim c_n\xi^{-nq_0}$, $\forall n\in N$

Таким образом, ряд (17) можно записать в виде:

$u(\xi)\sim a_0\xi^{1-q_0}+\varepsilon\xi^{-2q_0}[a_1+\varepsilon a_2\xi^{-q_0}+a_3(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+a_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^{n-1}+\ldots]$;

$\vartheta(\xi)\sim\xi^{-2_0}[b_0+\varepsilon b_1\xi^{-q_0}+b_2(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+b_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^n+\ldots]$; (19)

$x(\xi)\sim\xi+\varepsilon\xi^{-q_0}c_1+c_2(\varepsilon\xi^{-q_0})^2+\ldots+c_n(\varepsilon\xi^{-q_0})^n+\ldots$

Теперь определим нижнюю границу изменения переменной ξ. Для этого решим уравнение:

$x(\xi)=\eta+\varepsilon x_1(\xi)+\ldots=\eta-(b_0/(1-q_0)\ \eta\varepsilon^{-q_0}+o(\eta^{-2q_0})=0,\ (\eta\to 0)$ (20)

Предполагая, то $b_0>0$ отсюда имеем:

$$\eta=\xi_0(\varepsilon)\sim\left(\frac{b_0\varepsilon}{1+q_0}\right)^{\frac{1}{1+q_0}}$$

Теперь докажем, что на отрезке $[\xi_0(\varepsilon),1]$ изменения переменной ξ, выражение $x(\xi)+\varepsilon u'(\xi)\neq 0$.

Действительно, предположим ,что

$x(\xi)+\varepsilon u'(\xi)=0$

тогда

$x(\xi)+\varepsilon u'(\xi)=\xi+(\varepsilon\ b_0/(1-q_0))\ \xi^{-q_0}+O((\varepsilon\xi^{-q_0})^2)=0).$

Но это уравнение не имеет решения.

Таким образом, уравнение (1) и (15) эквивалентны. С другой стороны ряд (19) является асимптотическим на отрезке

$[\xi_0(x),1]$ т.к. $\varepsilon\xi^{-q_0}=o(\varepsilon^{-q_0})$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть 1) $q(x), p(x), r(x)\in C^\infty[0,1]$.

2) $b_0>0$

Тогда решение задачи (1)-(2)существует на отрезке [0,1] и его параметрическое представление можно получить из униформизованного уравнения (15) и асимптотика его решения представляется в виде (17)

Литература

1. Алымкулов К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла [Текст] / К. Алымкулов // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1981. - № 1. – С. 35-38.

2. Lighthill M.J. A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid [Text] / M.J. Lighthill // Phil. Magazine. –1949. – No. 40. – P. 1179-1201.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Мир, 1974. – Т III. – Часть 2. – 672 с.
4. Абдуллаева Ч.Х. Метод униформизация для решения сингулярного возмущенного уравнение второго порядка с регулярной особой точкой [Текст] / Ч.Х. Абдуллаева, К. Алымкулов // Вестник ОшГУ. – 2012. – № 3. – С. 30-35.