ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.968

Сапарова Г.Б.
к.ф.-м.н., доцент Ошского техн. универ. им. М.М. Адышева, Кыргызская Республика
Мурзабаева А.Б.
к.ф.-м.н., доцент Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЕЧИМ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯСЫН КУРУУ

Бул жумушта изилдөөнүн предмети катары үзгүлтүктүү ядросу бар биринчи типтеги Фредгольм интегралдык теңдеме каралат жана кысуу чагылдыруу принцибинин жардамы менен чечимдин регуляризациясы түзүлөт. Чечимдин жалгыздыгы далилденген. Изилдөөнүн максаты: биринчи типтеги интегралдык Фредгольм теңдемеси үзгүлтүксүз ядросу менен белгилүү шарттарда ар кандай функциялык мейкиндиктерде каралган. Изилдөөнүн методу: М.М. Лаврентьев үзгүлтүксүз ядросу бар биринчи түрдөгү Фредгольм интегралдык теңдемеси үчүн нормалдаштыруу ыкмасы пайдаланылган. Мындай маселелер биринчи жана үчүнчү типтеги интегралдык теңдемелерге келтирилет, анда ядро чөйрөнүн касиеттерин, чектерде өлчөөлөрдүн натыйжасы катары эркин мөөнөтү, ал эми керектүү функция ички чекиттердеги чөйрөнүн көрсөткүчү болуп саналат. Ошол эле учурда чечимдин өзгөчөлүгү, ошондой эле операторлордун көптүгүн нормалдаштыруу жана алардын натыйжалуулугун баалоо маселелери биринчи планга чыгат.

***Негизги сөздөр**: интегралдык теңдемелер; үзгүлтүктүү ядро; уникалдуулук; чечимдер; ядро; баалоо; функция; шарттар; регуляризация; резольвента.*

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

В данной работе предметом исследования является интегральное уравнение Фредгольма первого рода с разрывным ядром, построена регуляризация решения методом принципа сжимающих отражений. Доказана единственность решения. Цель исследования: рассмотрение на разных функциональных пространствах интегральных уравнений Фредгольма первого рода с неразрывным ядром при определенных условиях. Метод исследования: использовался метод М.М. Лаврентьева, предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода с неразрывным ядром. Такие задачи сводятся к интегральным уравнениям первого и третьего рода, где ядро представляет свойства среды, свободный член как результат измерений на границах, а искомая функция – как показатель среды во внутренних точках. При этом, на первый план выдвигаются вопросы единственности решения, а также построения регуляризирующих свойств операторов и оценки их эффективности.

***Ключевые слова:** интегральные; уравнения; разрывное ядро; единственность; решения; ядро; оценка; функция; условия; регуляризация; резольвента.*

CONSTRUCTION OF A REGULARIZATION OF THE SOLUTION TO THE FREGHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

This article examines the Fredholm integral equation of the first kind with a discontinuous kernel and constructs a regularization of the solution using the principle of compressive reflections. The uniqueness of the solution is proven. Fredholm integral equations of the first kind with continuous kernels under certain conditions were considered on different function spaces. Thus, M.M. Lavrentiev proposed a normalization method for the Fredholm integral equation of the first kind with a continuous kernel. To prove the existence of solutions to linear Fredholm and Volterra integral equations of the first kind with one variable and sufficient conditions for obtaining them, A. M. Denisov, V. O. Sergeev and other authors used the method of differentiation with respect to given functions. In their works, M.M. Lavrentyev, M.I.Imanaliev and A. Asanov studied the solution of linear integral equations of the first kind in the space of functions C(G), and generalized Volterra integral equations of the first type with a non – smooth kernel. Such problems are reduced to integral equations of the first and third kind, where the kernel represents the properties of the medium, the free term is *the result of measurements at the boundaries, and the desired function is an indicator of the medium at internal points. At the same time, the issues of uniqueness of the solution, as well as the construction of regularizing families of operators and evaluation of their effectiveness, come to the fore.*

***Key words**: integral; equations; first kind; uniqueness; solutions; kernel; estimate; function; conditions; regularization; resolvent.*

Введение

В настоящее время большой интерес проявляется к теории интегральных уравнений, в частности, некорректным задачам. Интегральные уравнения являются одним из важных областей математики, так как некорректные задачи вошли в приложения разных наук, таких как: физика, кинематика, сейсмика и другие. С развитием информационных технологий появилась возможность моделировать самые сложные технические, экономические задачи. Все они могут быть приведены к интегральным уравнениям, что говорит об актуальности таких уравнений [1-4].

Целью данной работы является построение регуляризации решения интегрального уравнения первого рода для случая разрывного ядра, то есть некорректной задачи. Результаты данного исследования внесут большой вклад в развитие некорректных интегральных уравнений.

Для доказательства существования решений линейных интегральных уравнений Фредгольма, Вольтерра первого рода с одной переменной и достаточные условия для их получения, А.М. Денисов, В.О. Сергеев и другие авторы использовали метод дифференцирования по заданным функциям. В своих работах М.М. Лаврентьев, М.И. Иманалиев и А. Асанов изучали решение линейных интегральных уравнений первого рода в пространстве функций С (G), и обобщенные интегральные уравнения Вольтерра первого типа с негладким ядром. Некорректные задачи в настоящее время применяются во многих науках.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b N(t,s)\,u(s)ds = f(t), \tag{1}$$

где $N(t,s), f(t)$ − заданные функции, причем

$$N(t,s) = \begin{cases} L(t,s), & \text{при} \quad a \le s \le t \le b, \\ P(t,s), & \text{при} \quad a \le t \le s \le b. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда в силу (2), имеем

$$\int_a^t L(t,s)\,u(s)ds + \int_t^b P(t,s)\,u(s)ds = f(t), \tag{3}$$

с уравнением (3) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_a^t L(t,s)\,v(s,\varepsilon)ds + \int_t^b P(t,s)\,v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u(a), \tag{4}$$

$t \in [a,b]$, $0 < \varepsilon$ − малый параметр.

Выполняются условия:

а) при любом фиксированном $t \in (a,b), L(s,t) \in M_1(a,t), P(t,s) \in M_1(t,b)$, а функция

$$L(t,t) \in L_1(a,b) \text{ и } L(t,t) \ge 0, P(t,s) = 0, \forall\, t \in [a,b];$$

б) при $\tau > \eta, \forall\ (\tau,s),(\eta,s) \in G = \big((t,s); a \le s \le t \le b\big)$, выполняется оценка

$$|L(\tau,s) - L(\eta,s)| \le m(s)\int_\eta^\tau L(s,s)\,ds,$$

где: $m(s) \ge 0$, при $t \in [a,b]$ и $m(t) \in M_1(a,b)$.

в) при $\tau > \tau, \forall\ (t,s),(\tau,s) \in G_1 = \big((t,s); a \le t \le s \le b\big)$, выполняется оценка

$$|P(t,s)-P(\tau,s)| \le m_1(s)\int_\tau^t K(\tau,\tau)\,d\tau,$$

где $m_1(t) \ge 0$, при $t \in [a,b]$ и $m_1(t) \in M_1(a,b)$.

г) $|u(t)-u(s)| \le C\left(\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau\right)^\gamma$, где $0<\gamma<1$ и $\varphi(t)=\int_0^t L(\tau,\tau)\,d\tau$,

тогда

$$|u(t)-u(s)| \le C|\varphi(t)-\varphi(s)|^\gamma.$$

Методы решения. В уравнении (4) сделаем замену

$$v(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon), \tag{5}$$

где $u(t)$ – неотрицательная непрерывная функция на $[a,b]$, решение уравнения (1).

$$\varepsilon\big(u(t)+\xi(t,\varepsilon)\big)+\int_a^t L(t,s)\big(u(s)+\xi(s,s)\big)ds+\int_t^b P(t,s)\big(u(s)+\xi(s,s)\big)ds=$$
$$=f(t)+u(a), \tag{6}$$

Преобразуем (6),

$$\xi(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)=-[u(t)-u(a)]-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[L(t,s)-L(s,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b P(t,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds; \tag{7}$$

Применяя резольвенту ядра $\left(-\frac{1}{\varepsilon}L(s,s)\right)$,

$$R(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}L(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau},$$

получаем уравнение вида:

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[L(t,s)-L(s,s)]\,\xi(s,s)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b P(t,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds-$$
$$-[u(t)-u(a)]+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\,\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^s[L(s,\tau)-L(\tau,\tau)]\,\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^b P(s,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\;+[u(s)-u(a)]\right\}ds \tag{8}$$

Применяя формулу Дирихле, преобразуем уравнение (8):

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[L(t,s)-L(s,s)]\,\xi(s,s)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b P(t,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds-[u(t)-u(a)]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot[u(s)-u(t)]ds+[u(t)-u(a)]-$$
$$-[u(t)-u(a)]\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot[L(\tau,s)--L(t,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau-$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[L(s,s)-L(t,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(s,s)ds}\cdot[L(s,s)--L(t,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+$$
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t\left(\int_a^s L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot P(\tau,s)d\tau\right)\xi(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^b\left(\int_a^t L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot[P(\tau,s)-P(t,s)]d\tau\right)\xi(s,\varepsilon)ds-$$
$$-\int_t^b[P(s,s)-P(t,s)]\xi(s,s)ds+\int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)ds}\,[P(s,s)-P(t,s)]\xi(s,\varepsilon)ds. \tag{9}$$

Упрощая уравнение (9), получаем:

$$\xi(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot[u(s)-u(t)]ds-[u(t)-u(a)]\cdot$$

$$\cdot\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot[L(\tau,s)--L(t,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau+$$

$+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(s,s)ds}\cdot[L(s,s)-L(t,s)]\xi(s,\varepsilon)ds++\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t\left(\begin{matrix}\int_a^s L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot\\ P(\tau,s)d\tau\end{matrix}\right)\xi(s,\varepsilon)ds+$

$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^b\left(\int_a^t L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\cdot[P(\tau,s)-P(t,s)]d\tau\right)\xi(s,\varepsilon)ds+\qquad\int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)ds}[P(s,s)-P(t,s)]\xi(s,\varepsilon)ds.$

Введем новые обозначения $H(t,s,\varepsilon), T(t,s,\varepsilon), Q(t,s,\varepsilon)$ и $\varphi(t,\varepsilon)$ получаем уравнение вида:

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_a^t H(t,s,\varepsilon)\,\xi(s,s)ds+\int_a^t T(t,s,\varepsilon)\xi(s,s)ds+\int_t^b Q(t,s,\varepsilon)\,\xi(s,s)ds+$$
$$+\varphi(t,\varepsilon),\qquad(10)$$

где:

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}[L(\tau,s)-L(t,s)]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(s,s)ds}[L(s,s)-L(t,s)];$$

$$T(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^s L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot P(\tau,s)d\tau;$$

$$Q(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)ds}[P(\tau,s)-P(t,s)]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)ds}[P(s,s)-P(t,s)];$$

$$\varphi(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot[u(s)-u(t)]ds-[u(t)-u(a)]\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(\tau,\tau)d\tau};$$

Согласно условиям в) и г) оценки введенных функций будут иметь вид:

$$|H(t,s,\varepsilon)|=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}[L(\tau,s)-L(t,s)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(s,s)ds}\cdot\\ [L(s,s)-L(t,s)]\end{matrix}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}d\tau\cdot m(s)\cdot\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)\,ds\right\}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot m(s)\cdot$$

$$\cdot\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\le\left|\begin{matrix}u=\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)\,ds;\;\; du=\frac{1}{\varepsilon}L(s,s)d\tau\\ dv=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}d\tau;\;\; v=e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\end{matrix}\right|\le\le m(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}$$

$$\le m(s);\qquad(11)$$

$|T(t,s,\varepsilon)|\le\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^s L(\tau,\tau)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot(\tau,s)d\tau\right|\le\frac{1}{\varepsilon}\int_a^s L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}d\tau\cdot$

$$\cdot m_1(s)\cdot\left\{\tfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)\,ds\right\} \le \left|\begin{matrix}\eta=\tfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^s L(\nu,\nu)\,d\nu; \quad \eta=s,\ \eta=0\\ \eta=a,\ \ \eta=\tfrac{1}{\varepsilon}\int_a^s L(\nu,\nu)\,d\nu\end{matrix}\right| \le$$

$$\le m_1(s)\left\{\int_0^\infty \eta e^{-\eta}\,d\eta\right\} \le m_1(s); \tag{12}$$

$$|Q(t,s,\varepsilon)| \le \left|\begin{matrix}\tfrac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}[P(\tau,s)-P(t,s)]d\tau+\tfrac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)ds}\\ \cdot[P(s,s)-P(t,s)]\end{matrix}\right| \le$$

$$\le \left|\begin{matrix}u=\tfrac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)\,ds;\ \ du=\tfrac{1}{\varepsilon}L(s,s)d\tau\\ dv=\tfrac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}d\tau;\ \ v=e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(s,s)ds}\end{matrix}\right| \le m_1(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t L(\tau,\tau)d\tau}\Big|_{\tau=s}^{\tau=t} \le$$

$$\le m_1(s); \tag{13}$$

$$|\varphi(t,\varepsilon)| \le \left|\begin{matrix}\tfrac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot[u(s)-u(t)]ds-[u(t)-u(a)]\cdot\\ \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(\tau,\tau)d\tau}\end{matrix}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(s,s)\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot C\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,d\tau\right)^\gamma\cdot e^\gamma ds+e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t L(\tau,\tau)d\tau}\cdot C\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,d\tau\right)^\gamma\cdot e^\gamma \le \left|\eta=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t L(\tau,\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^\infty e^{-\eta}\cdot\eta^\gamma\cdot C\cdot\varepsilon^\gamma d\eta+$$
$$+e^{-\eta}\cdot\eta^\gamma\cdot C\cdot\varepsilon^\gamma \le C\cdot\varepsilon^\gamma\cdot\left\{\int_0^\infty e^{-\eta}\cdot\eta^\gamma d\eta+\sup(e^{-\eta}\cdot\eta^\gamma)\right\} \le C\cdot V_1\cdot\varepsilon^\gamma, \tag{14}$$
$$V_1=\int_0^\infty e^{-\eta}\eta^\gamma d\eta+\sup(e^{-\eta}\eta^\gamma).$$

Сравнивая уравнения (4) и (7), уравнение (7) приводим к уравнению (10). Учитывая выше приведенные оценки, имеем:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_a^t |[m(s)+m_1(s)]|\xi(s,\varepsilon)\,ds+\int_t^b m_1(s)\,|\xi(s,\varepsilon)|ds+C\cdot V_1\cdot e^\gamma. \tag{15}$$

Отсюда, получаем:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \frac{C\cdot V_1\cdot e^\gamma}{1-\beta}e^{\int_a^t m(s)ds}, \quad t\in[a,b],$$

где,

$$\beta=\int_a^b m_1(s)e^{\int_a^s m(\tau)d\tau}ds<1. \tag{16}$$

Теорема. Пусть выполняются условия а), б), в), г) и (16). Тогда:

1. Если $L(t,t)>0$, при почти всех $t\in[a,b]$;
2. Уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C(a,b)$, тогда решение уравнения (4) при $\varepsilon\to 0$, сходится по норме $C(a,b)$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\big||v(t,\varepsilon)-u(t)|\big|_C \le \left(1+\frac{\beta}{1-\beta}\right)\cdot C\cdot V_1\cdot e^{\int_a^T[L(t,s)-L(s,s)]ds}.$$

Вывод

Построена регуляризация решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром в пространстве $C(a,b)$ методом сжимающих отображений. Доказано достаточное условие единственности решения.

Список литературы:

1. **Сапарова, Г.Б.** Единственность решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разрывным ядром в C[a,b] [Текст] / Г.Б. Сапарова // Материалы VI международной научно – методической конференции. - Алмата, 2013.- Т.1. - С.87 – 91.
2. **Сапарова, Г.Б.** Единственность решения системы нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода [Текст] / Г.Б. Сапарова // Известия КГТУ им. И. Разакова. – Бишкек, 2016. - №2(38). – С. 141 – 147.
3. **Чоюбеков, С.М.** Регуляризация решения неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, А.А. Асанов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2021. - №1. – С. 3 – 8.
4. **Сапарова, Г.Б.** Регуляризация решения системы нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода [Текст] / Г.Б. Сапарова // Известия КГТУ им. И. Раззакова. – Бишкек, 2016. - №2 (38). – С.147 – 153.
5. **Лаврентьев, М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. - 1959. - Т.127, №1. - С. 31 - 33.
6. **Иманалиев, М.И.** Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение [Текст] / М.М. Иманалиев. - Фрунзе: Илим, 1977. - 348 с.
7. **Иманалиев, М.И.** Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтера первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А.А.Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравн. – Фрунзе: Илим, 1988. - Вып.21. - С. 3 - 38.
8. **Сапарова, Г.Б.** Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / Г.Б. Сапарова, А.А. Асанов // Исслед. по интегро – дифф. урав. – Бишкек: Илим, 2008. - Вып. 38.
9. **Сапарова, Г.Б.** Единственность решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разрывным ядром в неограниченной области [Текст] / Г.Б. Сапарова // Известия ТУ.- Ош: ТУ, 2015. - Вып. 1. - С. 95 – 98.
10. **Чоюбеков, С.М.** О решении линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / С.М. Чоюбеков, А.А. Асанов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2020. - №1. – С. 3 – 8.

Поступила в редакцию: 28. 08. 2024 г.