Поступила в редакцию: 11. 03. 2024 г.

УДК 519.63

Пирматов А.З.
к.ф.-м.н., доцент Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Шестаков Е.И.
к.т.н., доцент Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Исаков Т.Э.
к.п.н., доц. Кыргызско-Узбекского Межд. универ. им. Б. Сыдыкова, Кыргызская Республика

ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ МОДЕЛДҮҮ ПСЕВДО-ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН САНДЫК ЧЕЧИМИ

Бул жумушта жекече туундулуу төртүнчү тартиптеги моделдүү псевдо-параболо-гиперболикалык теңдеме үчүн чек аралык маселелердин сандык чечими изилденген. Изилдөөнүн предмети болуп жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелер үчүн так чек аралык маселелердин сандык чечимдерин алуу жараяны саналат. Изилдөөнүн максаты – жекече туундулуу төртүнчү тартиптеги моделдүү псевдо-параболо-гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелерди сандык чечимдерин алууну үйрөнүү. Изилдөөдө сандык методдордун торчо усулу колдонулду. Төртүнчү тартиптеги моделдүү псевдо-параболо-гиперболикалык теңдеме үчүн чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденди. Илимий жана практикалык баалуулугу: жекече туундулуу төртүнчү тартиптеги моделдүү псевдо-параболо-гиперболикалык теңдеме, ага коюлган баштапкы жана чек аралык шарттар аппроксимацияланып, маселе сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасына алынып келинди жана торчолор усулу менен маселенин чечими таблицалык жана графикалык көрүнүштө алынды. Алынган жыйынтыктарды колдонмо математикалык адистиктерде окуган магистрантарды жана студенттерди окутууда да колдонууга болот.

***Негизги сөздөр**: псевдо-параболо-гиперболикалык теңдеме; торчо усулу; аппроксимация; алгебралык теңдемелер системасы; чек аралык маселелер; жашашы; жалгыздыгы; чечим.*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПСЕВДО-ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В данной работе исследуется численное решение краевых задач для модельного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с индивидуальными производными. Предметом исследования является процесс получения численного решения точных краевых задач для дифференциальных уравнений высшего порядка. Целью данной работы является получение численного решения краевых задач для модельных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в частных производных. В исследовании для численого решения дифференциальных уравнений использовался метод конечных разностей или метод сеток. Доказано существование и единственность решения краевой задачи для модельного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка. Научное и практическое значение: модельное псевдо-параболо-гиперболическое уравнение четвертого порядка в частных производных, наложенные на него начальные и граничные условия аппроксимированы, задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений, решение задачи была получена в табличном и графическом виде с использованием метода сеток. Полученные результаты могут быть использованы при обучении магистрантов и студентов, изучающих прикладную математику.

***Ключевые слова:** псевдо-параболо-гиперболическое уравнение; метод сеток; аппроксимация, система алгебраических уравнений; краевые задачи; существование; единственность; решение.*

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR A MODEL PSEUDO-PARABOLIC-HYPERBOLIC FOURTH ORDER PARTIAL DERIVATIVE EQUATION

This article studies the numerical solution of boundary value problems for a model fourth-order pseudoparabolic-hyperbolic equation with individual derivatives. The subject of the study is to obtain a numerical solution of exact boundary value problems for higher order differential equations. The goal of this work is to learn how to obtain numerical solutions to boundary value problems for model pseudo-parabolic-hyperbolic fourth-order partial differential equations. The study used the finite difference method or mesh method to solve the differential equations numerically. The existence and uniqueness of a solution to the boundary value problem for a model fourth-order pseudo-parabolic-hyperbolic equation is proven. Scientific and practical significance: мodel pseudo-parabolic-hyperbolic equation of the fourth order in partial derivatives, the initial and boundary conditions imposed on it were approximated, the problem was reduced to a system of linear algebraic equations, the solution to the problem was obtained in tabular and graphical form using the grid method. The results obtained can be used in teaching undergraduates and students studying applied mathematics.

Key words: *pseudo-parabolic-hyperbolic equation; grid method; approximation; system of algebraic equations; boundary value problems; existence; uniqueness; solution.*

Введение. В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики различных неоднородных, в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка [1].

Часто волны распространяются в средах, параметры которых резко меняются при переходе через некоторые линии или поверхности. В таких случаях при постановке краевых задач получаются дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами и условиями сопряжения в точках разрыва [2].

Одним из актуальных вопросов в современной теории дифференциальных уравнений является постановка и исследование корректных краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка [3,4]. Интенсивное исследование уравнений, смешанных эллиптико-параболических и параболо-гиперболических типов обусловлено тем, что, с одной стороны, новые типы смешанных уравнений еще мало исследованы в теоретическом плане, а с другой, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

Данная работа посвящена исследованию разрешимости краевой задачи с помошью методом сеток для модельного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в частных производных.

Постановка задачи.

В прямоугольной области $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_2<y<h_1\}, \quad (\ell,h_1,h_2>0)$, рассмотрим уравнение в частных производных четвертого порядка

$$0=\begin{cases} u_{xxyy}-u_{yyy}, y>0, \\ u_{xxyy}-u_{yy}, y<0, \end{cases} \tag{1}$$

пусть $D_1=D\cap(y>0), D_2=D\cap(y<0).$ Уравнение (1) является простой моделью уравнения псевдопараболического типа с двумя кратными семействами $x=const, y=const$ действительных характеристик. Оно является уравнением смешанного типа в том смысле, что при $-h_2<y<0$ относится к классу псевдопараболических уравнений, а при $0<y<h_1$ к классу псевдогиперболических уравнений. Прямая $y=0$ является линией сопряжения уравнения (1) [1].

Для уравнения (1) рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $D\setminus(y=0)$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned}
&u(0,y)=\varphi_1(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h_1,\\
&u(0,y)=\chi_1(y), u(\ell,y)=\chi_2(y), -h_2\le y\le 0,\\
&u(x,h_1)=\psi_1(x), u_y(x,h_1)=\psi_2(x), 0\le x\le \ell,\\
&u_{yy}(x,h_1)=\psi_3(x), 0\le x\le \ell,
\end{aligned}\tag{2}$$

где $\varphi_i(y),\chi_i(y),\psi_i(x),(i=1,2,3)$ - заданные функции.

Отметим, что выполняются следующие условия согласования

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'(h_1)=\psi_2(0), \varphi_1(h_1)=\psi_1(0), \varphi_2'(h_1)=\psi_2(\ell), \varphi_2(h_1)=\psi_1(\ell),\\
&\varphi_i(0)=\chi_i(0), \varphi_i^{(j)}(0)=\chi_i^{(j)}(0), \varphi_i,\chi_i,\psi_i\in C^2, i,j=1,2.
\end{aligned}\tag{3}$$

Из постановки задачи следует, что на линии $y=0$ выполняются следующие условия сопряжения:

$$\begin{aligned}
&u(x,+0)=u(x,-0), u_y(x,+0)=u_y(x,-0), 0\le x\le \ell,\\
&u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0), 0\le x\le \ell.
\end{aligned}\tag{4}$$

Аппроксимация. Для решения задачи используем метод сеток.

Значения функции в узлах (x_i,y_j) обозначим соответственно $u(x_i,y_j)=u_{i,j}$,

$$i=0,1,2,...,n, j=0,\pm1,\pm2,...,\pm m, n,m\in N.$$

Аппроксимации граничных условий в области D_1, получим в виде

$$\begin{aligned}
&u_{0,j}(0,y_j)=\varphi_{1j}, u_{n,j}(\ell,y_j)=\varphi_{2j},\\
&u_{i,m}(x_i,h_1)=\psi_{1i},\\
&u_y(x_i,h_1)\approx u_{i,m-1}(x_i,h_1)-u_{i,m}(x_i,h_1)=\psi_{2i}h_1,\\
&u_{yy}(x_i,h_1)\approx u_{i,m}-2u_{i,m-1}+u_{i,m-2}=\tau^2,\\
&i=0,1,2,...,n, j=0,1,...,m-1,m,\ n,m\in N.
\end{aligned}\tag{5}$$

А в области D_2, получим в виде

$$\begin{aligned}
&u_{0,j}(0,y_j)=\chi_{2j}, u_{n,j}(\ell,y_j)=\chi_{2j},\\
&j=0,-1,-2,...,-(m-1),-m,\ n,m\in N.
\end{aligned}\tag{6}$$

Для аппроксимации уравнения (1) методом сеток, воспользуемся методом конечных разностей. Пусть $u(x_i,y_j)$ представляет значения функций $u(x,y)$ на сетке с шагами по координатам h и k в направлениях x и y соответственно. Тогда производные функции $u(x, y)$, аппроксимируем в виде

$$
\begin{aligned}
&u_x(x_i, y_i) \approx (1/h)[u_{i+1,j} - u_{i,j}], u_{xx}(x_i, y_j) \approx (1/h^2)[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}],\\
&u_{yy}(x_i, y_j) \approx (1/k^2)[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}],\\
&u_{yyy}(x_i, y_j) \approx (1/k^3)[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}],\\
&u_{xxyy}(x_i, y_j) \approx (1/(h^2\tau^2))[u_{i+,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} -\\
&\qquad -2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}],
\end{aligned}
$$

где точность аппроксимации равна $O(h^2 + \tau^2)$.

Тогда в области D_1, для уравнения $u_{xxyy} - u_{yyy} = 0$ получим сеточное уравнение в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2k^2}[u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} - u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} +\\
&+u_{i-1,j-1}] - \frac{1}{k^3}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] = 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

а в области D_2, для уравнения $u_{xxyy} - u_{yy} = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2k^2}[u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} - u_{i+1,j-1} -\\
&-2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}] = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из формул (4) и (5) получим разностные схемы в областях D_1 и D_2 соответственно в виде

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j-2} = \frac{\tau^2}{h^4}[u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j+1} + 3u_{i,j} - 2u_{i,j-1} - u_{i-1,j+1} -\\
&-2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}] - [u_{i,j+1} - 3u_{i,j} + 3u_{i,j-1}],
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
i = 0,1,2,\ldots,n-1,\ j = m-1, m-2,\ldots,2,
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j-1} = \frac{1}{h^2-2}[u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} - u_{i,j+1} + 3u_{i,j} + u_{i-1,j+1} -\\
&-2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}] + h^2[u_{i,j+1} - 2u_{i,j}],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где

$$i=0,1,2,...,n-1,\ j=1,0,-1,-2,...,-m.$$

Из (4), (9) и (5), (10) однозначно определяется численные значения неизвестных $u_{i,j}(x,y),$ соответственно в областях D_1 и D_2, это означает, что решение задачи 1 существует и единственно.

Пример. Найти решение уравнения (1) в прямоульной области $D=\{(x,y):0<x<1,-1<y<1\}$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned}
&u(0,y)=x,u(1,y)=2x,0\le y\le 1,\\
&u(0,y)=x,u(1,y)=2x,-1\le y\le 0,\\
&u(x,1)=x+1,u_y(x,1)=1,0\le x\le 1,\\
&u_{yy}(x,1)=0,0\le x\le 1,
\end{aligned}$$

и начальным условиям $u(x,0)=x$.

Решение. Аппроксимации граничных условий (5) в области $D_1,$ получим:

$$\begin{aligned}
&u_{0,j}(0,y_j)=x_j,u_{10,j}(1,y_j)=2(2x_j-1)+2,\\
&u_{i,15}(x_i,1)=x_i+2,\\
&u_y(x_i,1)\approx u_{i,15-1}(x_i,1)-u_{i,15}(x_i,1)=2,\\
&u_{yy}(x_i,1)\approx u_{i,15}-2u_{i,15-1}+u_{i,15-2}=0,\\
&i=0,1,2,...,10,\ j=0,1,...,15.
\end{aligned}$$

А в области $D_2,$ из (6) получим в виде

$$\begin{aligned}
&u_{0,j}(0,y_j)=x_j,u_{10,j}(1,y_j)=x_j^3+2x_j+2,\\
&j=0,-1,-2,...,-15.
\end{aligned}$$

Тогда в области $D_1,$ для уравнения $u_{xxyy}-u_{yyy}=0$ получим сеточное уравнение в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2k^2}[u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}-2u_{i+1,j}+4u_{i,j}-2u_{i-1,j}-u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+\\
&+u_{i-1,j-1}]-\frac{1}{k^3}[u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}]=0,
\end{aligned}$$

а в области $D_2,$ для уравнения $u_{xxyy}-u_{yy}=0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2k^2}[u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}-2u_{i+1,j}+4u_{i,j}-2u_{i-1,j}-u_{i+1,j-1}-\\
&-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}]=0.
\end{aligned}$$

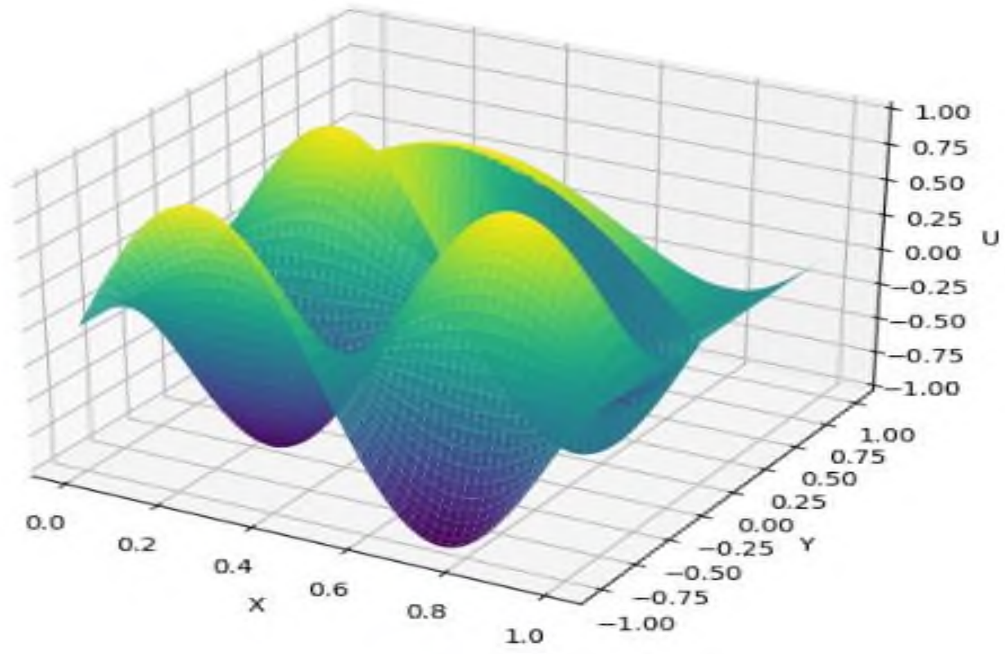

Рисунок 1 - График функции уравнения в частных производных четвертого порядка

Для метода сеток составлена программа, получено численное решение в виде таблицы и построен график функции.

Выводы:

1. Рассмотрена краевая задача для модельного псевдо-параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в частных производных. Методом сеток доказаны существование и единственность решение задачи;

2. Составлена программа в языке программирование Python и получено численное решение в виде таблицы. Построен график функции. Оценены погрешности аппроксимации и метода.

Список литературы:

1. **Габов, С.А.** Об одном эволюционном уравнении четвертого порядка, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости [Текст] / С.А. Габов, Б.Б. Оразов, А.Г. Свешников // Дифференциальные уравнения. - 1986. - Т. 22. - №1. - С. 19 - 25.
2. **Каминин, Л.И.** Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэфициентами [Текст] / Л.И. Каминин // Сиб. мат. журн. – 1963. –Т.4.- №5. - С. 1071-1105.
3. **Сопуев, А.** Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа [Текст]: дис. … д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. Сопуев. - Бишкек, 1996. - 249 с.
4. **Сопуев, А.** Единственность решения одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка [Текст] / А. Сопуев, А.З. Пирматов // Проблемы алгебры, геометры и их приложений: тез. докл. конф. – Ош: ГУ, 1996. – С. 56-58.

DOI: https://doi.org/10.54834/.vi2.360

Поступила в редакцию: 14.03.2024 г.

УДК 517.968

Сражидинов А.

к.ф.-м.н., проф. Баткенского государственного университета, Кыргызская Республика

ӨЗГӨЧӨ УЧУРДА ВОЛЬТЕРРАНЫН I ТЕКТЕГИ ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ТҮЙҮН ТЕҢДЕМЕСИН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ