ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 514.75

Матиева Г.М.
д.ф.-м.н., профессор Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Сейтказиева Г.И.
ст. преп. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Азимов Б.А.
к.ф.-м.н., доцент Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БЕРИЛГЕН БӨЛҮШТҮРҮҮ ТАРАБЫНАН ЖАРАТЫЛГАН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУ ЖӨНҮНДӨ

Бул жумушта евклиддик мейкиндикти берилген бөлүштүрүү тарабынан жаратылган бөлүктөп чагылтуу жөнүндө изилдөөлөр жүргүзүлгөн. E_5 евклиддик мейкиндигинин Ω аймагында үч ченемдүү Δ_3 бөлүштүрүүсү берилген. Анда бул берилген бөлүштүрүүгө ортогоналдык толуктоочу бөлүштүрүү $\overline{\Delta}_2$ инварианттык түрдө аныкталат. Ушул бөлүштүрүүлөрдүн орточо ийрилик векторлорунун жардамы менен E_5 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуу аныкталган жана анын айрым касиеттери изилденген. Каралып жаткан E_5 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуудагы Δ_3 жана $\overline{\Delta}_2$ бөлүштүрүүлөрүнүн элестеринин минималдык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген жана келип чыккан формалардын геометриялык маанилери көрсөтүлгөн. $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ бөлүктөп чагылтуудагы Δ_3 жана $\overline{\Delta}_2$ бөлүштүрүүлөрүнүн элестеринин минималдык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары аныкталган.

Негизги сөздөр: *евклиддик мейкиндик; бөлүштүрүү; бөлүктөп чагылтуу; орточо ийрилик вектору.*

О ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОМ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В данной работе проведены исследования о частичном отображении евклидова пространства, порожденном заданным распределением. В области Ω евклидова пространства E_5 задано трехмерное распределение Δ_3. Тогда инвариантным образом определяется ортогонально дополнительное распределение $\overline{\Delta}_2$ к данному. С помощью векторов средней кривизны этих распределений определяется частичное отображение пространства E_5 и изучены некоторые его свойства. Доказаны необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений Δ_3 и $\overline{\Delta}_2$ в рассматриваемом частичном отображении евклидова пространства E_5 выяснен геометрический смысл основных конечных соотношений. Найдены необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений $\Delta_3^{'}, \overline{\Delta}_2^{'}$ в частичном отображении $f:\Omega \to \overline{\Omega}$.

Ключевые слова: *евклидово пространство; распределение; частичное отображение; вектор средней кривизны.*

ON A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDIAN SPACE GENERATED BY A GIVEN DISTRIBUTION

In this paper, research is carried out on the partial mapping of Euclidean space generated by a given distribution. It is considered a three dimensional distribution Δ_3 in domain Ω of Euclidean space E_5 .Then it is defined a orthogonal-complimentary distribution $\overline{\Delta}_2$ to given distribution Δ_3 by invariant way. By the vectors of mean curvatures of these distributions we define a partial mapping of the space E_5 and investigate *this partial mapping. It is proved necessary and sufficient conditions of minimality of the images of distributions* Δ_3 *and* $\bar{\Delta}_2$ *in the partial mapping of the Euclidean space* E_5. *It is found out of the geometrical meaning of the final equations.* The necessary and sufficient conditions for the minimality of distribution images $\Delta_3^{'},\bar{\Delta}_2^{'}$ in a partial mapping are found $f:\Omega\to\bar{\Omega}$.

Key words: *euclidean space; distribution; partial mapping; mean curvature vector.*

Введение

Вопросами точечных соответсвий пространств равной размерности занимались такие известные математики, как А.П. Норден, В.В. Рыжков, М.А. Акивис, В.Т. Базылов и их ученики, а также другие геометры.

Теория распределений на гладких многообразиях является значительной главой современной дифференциальной геометрии. Она позволила по новому подойти к ряду задач теории отображений и сетей.

Отнесем пространство E_5 к подвижному ортонормированному реперу $\Re=\left(x,\vec{e}_A\right)$, где $x\in\Omega$, $\left|\vec{e}_A\right|=1\quad\left(A,B,C,=\overline{1,5}\right)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A,\qquad d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B. \tag{1}$$

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики

$$dg_{AB}=g_{AK}\omega_A^K+g_{KB}\omega_A^K,$$

где $g_{AB}=\vec{e}_A\cdot\vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_5 и структурным уравнениям:

$$D\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A,$$

$$D\omega_A^B=\omega_A^K\wedge\omega_K^B.$$

Рассмотрим в области $\Omega\subset E_5$ распределение Δ_3 и ортогонально дополнительное к Δ_3 распределение $\bar{\Delta}_2$. Векторы $\vec{e}_i\left(i=1,2,3\right)$ репера $\Re$ расположим в пространстве $\Delta_3\left(x\right)$, а векторы $\vec{e}_\alpha\left(\alpha,\beta,\gamma=4,5\right)$ - в подпространстве $\bar{\Delta}_2\left(x\right)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_3 будут:

$$\omega_i^\alpha=\Lambda_{iA}^\alpha\omega^A, \tag{2}$$

а так как $\bar{e}_\alpha\in\bar{\Delta}_2\left(x\right)$, то

$$\omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha A}^i\omega^A.$$

Диффренцируя тождества $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha=0$, получим

$$\omega_i^\beta g_{\beta\alpha}+g_{ij}\omega_\alpha^j=0.$$

Отсюда имеем:

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik}\omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \qquad \omega_\alpha^i = -g_{ij}\omega_\beta^j g^{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2) и применяя лемму Картана [1], получим:

$$d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha\omega_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha\omega_i^k + \Lambda_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha = \bar\Lambda_{ijA}^\alpha\omega^A, \qquad \bar\Lambda_{ijA}^\alpha = \Lambda_{ijA}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\alpha \cdot \Lambda_{jA}^\beta \tag{4}$$

$$d\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha\omega_\beta^\alpha - \Lambda_{k\beta}^\alpha\omega_i^k + \Lambda_{i\beta}^\gamma\omega_\gamma^\alpha = \bar\Lambda_{i\beta A}^\alpha\omega^A, \quad \bar\Lambda_{i\beta A}^\alpha = \Lambda_{i\beta A}^\alpha + \Lambda_{ik}^\alpha \cdot \Lambda_{\beta A}^k \tag{5}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\right\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_3 [2]. При этом компоненты $\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексом ***i,j***. Величины

$$H_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ji}^\alpha\right) \tag{6}$$

образуют тензор. Этот тензор называют тензором неголономности распределения Δ_3. Распределение, тензор неголономности которого равен нулю тождественно, назывется голономным.

Векторы

$$\vec{M}_3(x) = \frac{1}{3}g^{ij}\Lambda_{(ij)}^\alpha\vec{e}_\alpha, \qquad \vec{M}_2(x) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Lambda_{(\alpha\beta)}^i\vec{e}_i \tag{7}$$

называются векторами средней кривизны распределений Δ_3 и $\bar\Delta_3$ [3]. Если вектор средней кривизны распределения тождественно равен нулевому вектору, то распределение называется минимальным.

Пусть распределение Δ_3 несет ортогональную 3-ткань, а распределение $\bar\Delta_3$ – ортогональную 2-ткань [4]. В пространстве E_5 получим ортогональную сеть Σ_5. Единичные векторы $\vec{e}_A$ подвижного репера $\Re$ направим по касательным к линиям полученной сети в точке $xm\Omega$. Тогда формы ω_A^B $(A \neq B)$ являются главными [5]:

$$\omega_A^B = a_{AK}^B\omega^K, \tag{8}$$

где

$$a_{ik}^\alpha = \Lambda_{ik}^\alpha, \;\; a_{\alpha k}^i = \Lambda_{\alpha k}^i, \; a_{Ak}^B = \Lambda_{Bk}^A. \tag{9}$$

Учитывая (8), (9) из (4) имеем

$$d\Lambda_{ij}^{\alpha} = A_{ije}^{\alpha}\omega^{e} + A_{ij\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma}, \tag{10}$$

где

$$A_{ije}^{\alpha} = \Lambda_{ije}^{\alpha} + \Lambda_{i\beta}^{\alpha}\Lambda_{je}^{\beta} + \Lambda_{ik}^{\alpha}a_{je}^{k} + \Lambda_{kj}^{\alpha}a_{ie}^{k} - \Lambda_{ij}^{\alpha}a_{\beta e}^{\alpha},$$

$$A_{ij\gamma}^{\alpha} = \Lambda_{ij\gamma}^{\alpha} + \Lambda_{i\beta}^{\alpha}\Lambda_{j\gamma}^{\beta} + \Lambda_{ik}^{\alpha}a_{j\gamma}^{k} + \Lambda_{kj}^{\alpha}a_{ij}^{k} - \Lambda_{ij}^{\beta}a_{\beta\gamma}^{\alpha}.$$

При $i = j$ отсюда получим

$$\mathrm{d}\Lambda_{ii}^{\alpha} = A_{iie}^{\alpha}\omega^{l} + A_{ii\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma}, \tag{11}$$

где

$$A_{iiA}^{\alpha} = \Lambda_{iiA}^{\alpha} + \Lambda_{i\beta}^{\alpha}\Lambda_{jA}^{\beta} + \Lambda_{i\gamma}^{\alpha}a_{jA}^{\gamma} + \Lambda_{k\beta}^{\alpha}a_{iA}^{k} - \Lambda_{i\beta}^{\gamma}a_{\gamma A}^{\alpha}$$

Аналогично, учитывая (8), (9) из (5) имеем

$$d\Lambda_{i\beta}^{\alpha} = B_{i\beta l}^{\alpha}\omega^{l} + B_{i\beta\tau}^{\alpha}\omega^{\tau}, \tag{12}$$

где $\alpha = \beta$, то здесь имеем:

$$d\Lambda_{i\beta}^{\beta} = B_{i\beta l}^{\beta}\omega^{l} + B_{i\beta\tau}^{\beta}\omega^{\tau}, \tag{13}$$

где

$$B_{i\beta A}^{\alpha} = \Lambda_{i\beta A}^{\alpha} + \Lambda_{ik}^{\beta}\Lambda_{\beta A}^{k} + \Lambda_{i\gamma}^{\beta}a_{\beta A}^{\gamma} + \Lambda_{k\beta}^{\beta}a_{iA}^{k} - \Lambda_{i\beta}^{\gamma}a_{\gamma A}^{\beta}$$

(по β нет суммирования).

В силу последнего равенства формулы (9) имеем:

$\Lambda_{i\beta}^{\beta} = -\Lambda_{\beta\beta}^{i}$,

Следовательно

$$d\Lambda_{\beta\beta}^{i} = -d\Lambda_{i\beta}^{\beta}. \tag{14}$$

Пусть

$$d\Lambda_{\beta\beta}^{i} = B_{\beta\beta l}^{i}\omega^{l} + B_{\beta\beta\gamma}^{i}\omega^{\gamma} \tag{15}$$

Учитывая (13), (14) отсюда получим:

$$B_{\beta\beta l}^{i} = -B_{i\beta l}^{\beta}, \quad B_{\beta\beta\gamma}^{i} = -B_{i\beta\gamma}^{\beta} \tag{16}$$

Получим частичное отображение

f: $\Omega \to \bar{\Omega}$ такое, что $f(x) = M$. Так как репер $R = (x, \vec{e}_A)$ ортонормированный, векторы (7) имеют вид:

$$\vec{M}_3 = \frac{1}{3}\sum_i \Lambda_{ii}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha},\ \overrightarrow{M_2} = \frac{1}{2}\sum_i \Lambda_{\beta\beta}^{i}\vec{e}_i \tag{17}$$

Дифференцируя равенство

$$\vec{M} = \frac{1}{3}\sum \Lambda_{ii}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} + \frac{1}{2}\sum_i \Lambda_{\beta\beta}^{i}\vec{e}_i \tag{18}$$

используя (4), (5), (9) и деривационные формулы, имеем:

$$d\vec{M} = \omega^i \varepsilon_i + \omega^{\gamma}\vec{\varepsilon}_{\gamma}, \tag{19}$$

где

$$\vec{\varepsilon}_A = \left(\frac{1}{3}\sum_k \Lambda_{kk}^{\alpha}\Lambda_{\alpha A}^{l} + \frac{1}{2}\sum B_{\beta\beta A}^{l} + \frac{1}{2}\Lambda_{\beta\beta}^{i}a_{jA}^{l}\right)\vec{e}_l +$$
$$+\left(\frac{1}{3}\sum_l \mathrm{A}_{llA}^{\alpha} + \frac{1}{3}\Lambda_{kk}^{\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\beta}\Lambda_{\beta\beta}^{j}\Lambda_{jA}^{\alpha}\right)\vec{e}_l. \tag{20}$$

Координаты векторов $\varepsilon_i, \varepsilon_{\gamma}$ относительно базиса $\{\vec{e}_i, \vec{e}_{\alpha}\}$ обозначим через $\{\varepsilon_i^l,\ \varepsilon_i^{\alpha}\}$ и $\{\varepsilon_{\gamma}^l,\ \varepsilon_{\gamma}^{\alpha}\}$ соответственно. Тогда фомула (20) записывается в виде:

$$\vec{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^l\vec{e}_l + \varepsilon_i^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, \tag{21}$$

$$\vec{\varepsilon}_{\gamma} = \varepsilon_{\gamma}^l\vec{e}_l + \varepsilon_{\gamma}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, \tag{22}$$

Область $\bar{\Omega}$ отнесем к подвижному реперу $\bar{\Re} = \{M, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{\gamma}\}$. При таком выборе реперов дифференциальные уравнения отображения f: $\Omega \to \bar{\Omega}$ имеют вид:

$$\omega^A = \bar{\omega}^A, \tag{23}$$

где 1-формы ω^A, $\bar{\omega}^A$ является линейными комбинациями дифференциалов координат точек в областях $\Omega u \bar{\Omega}$ cooтветственно.

Деривационные формулы репера $\bar{\Re}$ имеют вид:

$$d\vec{M} = \omega^A\vec{\varepsilon}_A,\ d\vec{\varepsilon}_A = \omega_A^B\vec{\varepsilon}_B.$$

Связь между формами ω_A^B и $\bar{\omega}_A^B$ найдена в работе [6]:

$$\bar{\omega}_i^j = \tilde{\varepsilon}_k^j\bar{\varepsilon}_{iA}^k\omega^A - \tilde{\varepsilon}_k^j\bar{\varepsilon}_{\gamma}^k\bar{\omega}_i^{\gamma},$$

$$\bar{\omega}_i^{\beta}=\tilde{P}_{\alpha}^{\beta}q_{iA}^{\alpha}\omega^A, \qquad (24)$$

$$q_{iA}^{\alpha}=\bar{\varepsilon}_{iA}^{\alpha}-\varepsilon_l^{\alpha}\tilde{\varepsilon}_k^l\tilde{\varepsilon}_{iA}^k. \qquad (25)$$

Расмортим распределение $\Delta_3^{'}=f\left(\Delta_3\right)=\left(M,\vec{\varepsilon}_i\right)$. Его дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\bar{\omega}_i^{\alpha}=\bar{\Lambda}_{iA}^{\alpha}\omega^A,$$

где (в силу (24)) $\bar{\Lambda}_{iA}^{\alpha}=\tilde{P}_{\alpha}^{\beta}q_{iA}^{\alpha}$.

Вектор средней кривизны этого распределения имеет вид:

$$\vec{M}_3^{'}=\frac{1}{3}\bar{g}^{ij}\bar{\Lambda}_{(ij)}^{\alpha}\vec{\varepsilon}_{\alpha}=\frac{1}{3}\bar{g}^{ij}\tilde{P}_{\beta}^{\alpha}q_{(ij)}^{\beta}\vec{\varepsilon}_{\alpha}$$

где $\bar{g}^{AB}$-ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_5. В работе [6] найдены необходимые и достаточные условия ортонормированности репера $\Re'=\left(M,\vec{\varepsilon}_A\right)$. В таком случае вектор M_3' имеет вид:

$$\vec{M}_3^{'}=\frac{1}{3}\delta^{ij}\tilde{\mathrm{P}}_{\beta}^{\alpha}q_{ij}^{\beta}\vec{\varepsilon}_{\alpha}=\frac{1}{3}\sum_i\tilde{P}_{\beta}^{\alpha}q_{(ij)}^{\beta}\vec{\varepsilon}_{\alpha}$$

Требуя $\vec{M}_3^{'}=\vec{O}$, отсюда имеем систему двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными

$$\sum_i\tilde{P}_{\beta}^{\alpha}q_{ii}^{\beta}=0,$$

где $det\tilde{P}_{\beta}^{\alpha}\neq 0$. Поэтому отсюда получим $\sum_i q_{ii}^{\beta}$=0, или в силу (25) имеем:

$$\sum_i\left(\varepsilon_{ii}^{\beta}-\varepsilon_l^{\beta}\tilde{\varepsilon}_k^l\bar{\varepsilon}_{ii}^k\right)=0 \qquad (26)$$

Геометрический смысл которого заключается в следующем :

$$\sum_i\vec{e}_{\beta}d_i\vec{\varepsilon}_i=\sum_i\sum_k\varepsilon_l^{\beta}\tilde{\varepsilon}_k^l\left(\vec{e}_{\beta}d_i\vec{\varepsilon}_i\right) \qquad (27)$$

Обратно, если имеет место равенство (26), то $\vec{M}_3^{'}=\vec{0}$, т.е. распределение $\Delta_3^{'}=f\left(\Delta_3\right)$ является минимальным. Таким образом доказана

Теорема 1. Распределение $\Delta_3^{'}=f\left(\Delta_3\right)$ является минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\sum_i q_{ii}^{\beta}=0.$$

Аналогичным образом докажем теорему:

Теорема 2. Распределение $\bar{\Delta}_2^{'}=f\left(\bar{\Delta}_2\right)$ является минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\sum_{\alpha} q^{k}_{\alpha\alpha} = 0.$$

Доказательство:

Рассмотрим распределение $\overline{\Delta}'_2 = f\left(\overline{\Delta}_2\right)$. Его дифференциальные уравнения имеют вид :

$$\overline{\omega}^{i}_{\alpha} = \overline{\Lambda}^{i}_{\alpha A}\omega^{A},$$

где

$$\overline{\Lambda}^{i}_{\alpha A} = \tilde{P}^{i}_{k} q^{k}_{\alpha A}\omega^{A}.$$

Вектор средней кривизны распределения $\overline{\Delta}'_2$ имеет вид:

$$\overline{\overrightarrow{M'_2}} = \frac{1}{2}\overline{g}^{\alpha\beta}\tilde{P}^{i}_{k} q^{k}_{\alpha\beta}\vec{\varepsilon}_{i}.$$

Пусть распределение $\overline{\Delta}'_2$ - минимальное, т.е. $\overline{\overrightarrow{M'_2}} = \vec{0}$. Отсюда имеем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\sum_{\alpha}\tilde{P}^{i}_{k} q^{k}_{\alpha\alpha} = 0,$$

где det‖ $\tilde{P}^{i}_{k}$ ‖≠0. Поэтому отсюда получим $\sum_{\alpha} q^{k}_{\alpha\alpha}$ =0. Теорема доказана.

Вывод

Найдены необходимые и достаточные условия минимальности образов распределений $\Delta'_3, \overline{\Delta}'_2$ в частичном отображении $f : \Omega \to \overline{\Omega}$.

Список литературы:

1. **Фиников, С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников – М.– Л.: Гостехиздат, 1948. - 432 с.
2. **Лаптев, Г.Ф.** Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связи I [Текст] / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Труды геом. семинара. - Москва, 1971. - Т.3. – С. 49 - 94.
3. **Кузьмин, М.К.** Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n [Текст] / М.К. Кузьмин // Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1975. - С. 215 - 229.
4. **Жуликовкий, В.Н.** Классическая дифференциальная геометрия [Текст] / В.Н. Жуликовкий. – М.: Физматгиз, 1963. - 540 с.
5. **Базылов, В.Т.** О Фундаментальных объектах плоских многомерных сетей [Текст] / В.Т. Базылов // Изв. вузов. Математика. – Москва, 1967. - Т. 9. – С. 3-11.
6. **Матиева, Г.** Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст]: монография / Г. Матиева. – Ош: ГУ, 2003. - 151 с.
7. **Матиева, Г.** Необходимые и достаточные условия существования квазидвойных линий частичного отображения f_2^1 в евклидовом пространстве E_5. [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.Т. Нышанбаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2022. – №3. – С. 32-39.
8. **Матиева, Г.** О существовании квазидвойных линий частичного отображения f_5^4 в евклидовом пространстве E_5 [Текст] / Г. Матиева, Ч.Х. Абдуллаева, Н.О. Рустамова // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2022. – №3. – С. 39-49.

DOI: https://doi.org/10.54834/.vi2.358