жөндөмдүүлүгүн (таанып-билүүнүн төмөнкү тепкичи), о.э. аныктамасынын негизинде касиеттерин келтирип чыгуу – материалды (түшүнүктү) түшүүнү билдирет. «Жандаш бурчтар» түшүнүгүнүн мазмунун түзүүчүлөрүнүн байланыштарын, айырмачылыктарын бөлүп карай билүү иш аракети анализдин жардамында, ал эми бул түшүнүккө карата бышыктоо этабында түзүлгөн 1-таблицаны толтуруу синтездөө ой жүгүртүүсү менен ишке ашат да, андан кийин бул түшүнүк боюнча окуучулар жалпы ой-толгоо жүргүзүшөт (баалоо – ой жүгүртүүнүн эң жогорку тепкичи) (3-сүрөт).

Жыйынтык

Ар бир окуучунун материалды өздөштүрүү деңгээли, эс тутумунун дарамети ар түрдүү экендиги белгилүү. Алардан бардык аныктамалардын, касиеттердин, теоремалардын формулировкасын жана далилдөөлөрүн түшүнбөстөн, жатка билүүнү талап кылуунун зарылдыгы жок. Ошентип, ар кандай эле геометриялык түшүнүктү калыптандыруу аркылуу окуучулардын мейкиндик ой жүгүртүүсүн өнүктүрүүгө шарт түзүүгө болот.

Колдонулган адабияттар:

1. **Темербекова, А.А.** Методика обучения математике [Текст]: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению "Педагогическое образование / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. – СПб.: Лано, 2015. – 512 с.
2. **Матиева, Г.** Системный подход к определению геометрических понятий как основа формирования пространственного мышления будущих учителей математики [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Математика и математическое образование: сбор.трудов по матер. IX междун. науч. конф. Математика. Образование. Культура. - Россия: ТГУ, 2019. – С. 29 - 34.
3. **Борбоева, Г.М.** Система педагогических условий в формировании пространственного мышления будущих учителей математики [Текст] / Г.М. Борбоева // Тенденции развития науки и образования. – Самара, НИЦ Л-Журнал, 2020.– С.54-58
4. **Бекбоев, И.Б.** Геометрия: орто мектептин 7-9 кл. [Текст] / И.Б. Бекбоев, А.А. Борубаев, А.А. Айылчиев. – Б.: Билим-компьютер, 2015. – 288 б.
5. **Борбоева, Г.М.** Модели Пуанкаре геометрии Лобачевского и их место в развитии пространственного мышления [Текст] / Г.М. Борбоева, А.Н. Абдышукурова, А.К. Аманова // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2020. – №1. – С. 28–34 .

Поступила в редакцию 21.05.2021г.

УДК 517.929

Жээнтаева Ж.К.
к.ф-м. н., доцент Кыргызско-Узбекского Международного универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика

КЕЧИГҮҮЧҮ АРГУМЕНТИ МЕНЕН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ЭКВИВАЛЕНТТҮҮЛҮГҮ БОЮНЧА САНДЫК ТАЖРЫЙБАЛАР

Мурда жарыяланган макалаларда убакыттын чексиз өсүүсүндө жарым окто аныкталган функциялардын топтору үчүн асимптотикалык эквиваленттүүлүгүнүн аныктамасы киргизилген. Макалада убакыттын чексиз өсүүсүндө чектелген кечигүүчү аргументи менен сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын *асимптотикалык жүрүм-туруму изилденет. Теңдемелердин мейкиндиктеринде асимптотикалык эквиваленттүүлүгүнүн бар болуусун камсыз кылуучу коэффициенттин чектерин табуу маселеси коюлду. Бул үчүн дифференциалдык теңдемелерди айырма теңдемелери менен жакындаштыруу жана сандык эксперименттердин усулдугун пайдалануу сунушталат. Кечигүү менен айырма теңдемелеринин системасы түзүлдү. Баштапкы шарттар жана коэффициенттин маанилери кокустан тандалат. Бул система кадамдар усулу менен чыгарылат. Теңдемелердин мейкиндиктеринин асимптотикалык бир өлчөмдүгүн камсыз кылуучу коэффициенттин чектери табылды. Иштелип чыккан усулду динамикалык системалар үчүн баштапкы маселелердин башка түрлөрүнүн чыгарылыштарынын асимптотикалык жүрүм-турумун изилдөө үчүн колдонсо да болот.*

Негизги сөздөр: *эволюциялык теңдеме; Вольтерра тибиндеги теңдеме; сандык тажрыйба; дифференциалдык теңдеме; кечигүүчү аргумент; баштапкы маселе; асимптотика; эквиваленттүүлүк.*

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В ранее опубликованных статьях было введено определение асимптотической эквивалентности при неограниченном увеличении времени для семейств функций, определенных на полуоси. В статье исследуется асимптотическое поведение решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с одним ограниченным запаздыванием при неограниченном увеличении времени. Поставлена задача найти границы для коэффициента, обеспечивающие наличие асимптотической эквивалентности в пространстве решений. Для этого предлагается использовать приближение дифференциальных уравнений разностными уравнениями и методику численных экспериментов. Построена система разностных уравнений с запаздыванием. Начальные условия и значения коэффициента выбираются случайно. Эта система решается методом шагов. Найдены границы для коэффициента, обеспечивающие асимптотическую одномерность пространства решений. Разработанная методика может применяться для исследования асимптотического поведения решений других видов начальных задач для динамических систем.

Ключевые слова: *эволюционное уравнение; уравнение типа Вольтерра; численный эксперимент; дифференциальное уравнение; запаздывающий аргумент,; начальная задача; асимптотика; эквивалентность*

NUMERICAL EXPERIMENTS ON ASYMPTOTICAL EQUIVALENCE OF SOLUTIONS OF EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

Supra, the author introduced definition of asymptotical equivalence of families of functions as time tends to infinity. In the paper asymptotical behavior of solutions of initial value problems for differential equations with one bounded delay of argument as time tends to infinity is investigated. The problem to find boundaries for the coefficient providing existence of asymptotical equivalence in the space of solutions is put. To do it approximation of differential equations by difference ones and methodic of numerical experiments is proposed to be used. A system of difference equations with delay is constructed. Initial conditions and values of the coefficient are chosen randomly. The system is solved by the method of steps Boundaries for the coefficient providing asymptotical one-dimensionality of the space of solutions are found. The methodic developed can be applied to investigate asymptotical behavior of solutions of another types of initial value problems for dynamical systems.

Keywords: *evolutional equation; Volterra type equation; numerical experiment; differential equation; retarded argument; initial value problem; asymptotic; equivalence.*

Введение. В [6] было введено определение асимптотической эквивалентности решений начальных задач для уравнений с запаздывающим аргументом при увеличении времени. В [5] была предложена методика численных экспериментов для исследования свойств решений начальных задач.

Цель настоящей статьи - организация численных экспериментов для поиска условий асимптотической эквивалентности решений.

В первом разделе представлены необходимые определения.

Во втором разделе описана постановка начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Для таких уравнений в работах ряда авторов, в том числе в [1], [2] (см. обзор в [3] и результат [4]) было установлено, что асимптотическое поведение решений начальных задач (образующих бесконечномерное множество) определяется не знаками (положительными, отрицательными) некоторых коэффициентов, а величиной запаздывания.

Для некоторых типов дифференциальных уравнений используется приближение дифференциальных уравнений разностными уравнениями.

С запаздыванием нами эти результаты были обобщены на некоторые типы операторных уравнений. Также было установлено, что в построении указанной асимптотики ведущую роль играет конечномерное пространство так называемых «специальных» решений дифференциальных уравнений. Это понятие также было обобщено нами на операторные уравнения.

1. Определения асимптотической эквивалентности и асимптотического фактор-пространства

Сначала запишем решения динамических систем в наиболее общем виде. Наложение условий на элементы пространства решений, непосредственно обеспечивающих наличие соответствующих явлений, методически удобно тем, что, в свою очередь, можно накладывать условия на исходные данные различных типов динамических задач, приводящих к одному и тому же динамическому пространству решений.

Для единого изложения задач с непрерывным и дискретным временем будем предполагать, что аргумент искомых функций t принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ, имеющему наименьший элемент (будем обозначать его «0»), но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется Λ $=\boldsymbol{R}_{+}\equiv[0,\infty)$ или $\Lambda=N_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

В данной работе мы рассматриваем только начальные задачи. Если предположить, что начальная задача всегда имеет решение; это решение единственно; это решение является глобальным, то есть продолжается на все множество Λ, то пространство решений некоторой динамической системы с начальным условием φ можно представить в виде оператора $W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z$, Φ - топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений.

В случае $\Lambda=\boldsymbol{R}_{+}$ будем предполагать, что $W(t,\varphi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z:

линейные одномерные ($\boldsymbol{R}$); линейные многомерные ($\boldsymbol{R}^d$);

- линейные нормированные; метрические.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть задана функция $\psi: \Lambda \to \boldsymbol{R}_{++}$. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением асимптотической эквивалентности по функции ψ:

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_{\psi(t)} \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{\psi(t)||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z: t\to\infty\}=0).$$

Если Z - метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_{\psi(t)} \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{\psi(t)\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)): t\to\infty\}=0).$$

При $\psi(t)\equiv 1$ получаем

О п р е д е л е н и е 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением асимптотической эквивалентности:

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z: t\to\infty\}=0).$$

Если Z - метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)): t\to\infty\}=0).$$

В качестве «функций сравнения ψ» обычно используются экспоненциальные функции. Поэтому предлагается отдельное

О п р е д е л е н и е 3. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением λ-экспоненциальной асимптотической эквивалентности $(\lambda>0)$:

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\sup\{||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z \exp(\lambda t): t\in\Lambda\}<\infty).$$

Если Z - метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\sup\{\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \exp(\lambda t): t\in\Lambda\}<\infty).$$

Данные определения мы будем использовать для исследования асимптотики.

2. Дифференциальное уравнение с запаздыванием

Рассматривается задача вида

$$x'(t) = \begin{cases} P(t)\varphi(t-h), t\in[0,h] \\ P(t)x(t-h), t\in(h,\infty), \end{cases} x(0)=\varphi(0), \tag{1}$$

для $x(t)\in C(\boldsymbol{R}_+)$, где $\varphi(t)\in\Phi=C[-h,0]$ и $P(t)\in C(\boldsymbol{R}_+)$ – заданные функции, $Z=\boldsymbol{R}$.

В случае автономного уравнения $(P(t)=p=const)$ полное асимптотическое представление решений начальной задачи (1) при $t\to\infty$ дает теория Флоке (см. например, [1], [2]): алгебраическое характеристическое уравнение

$$\lambda=p\cdot\exp(-\lambda h \tag{2}$$

имеет бесконечное количество решений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ в комплексной плоско-сти, таких, что $\lim\{Re\lambda_k | k\to\infty\}=-\infty$, и решение представимо в виде сходящегося или асимптотического ряда

$$X(t;\varphi(s):s\in[-h,0])=C_1\varphi(s:s\in[-h,0])\exp(\lambda_1 t)+C_2\varphi(s:s\in[-h,0])\exp(\lambda_2 t)+\ldots \tag{3}$$

$$+C_k\varphi(s:s\in[-h,0])\exp(\lambda_k t)+\ldots$$

где C_k - некоторые линейные функционалы от начальной функции. Таким образом, исследование автономного уравнения сводится к исследованию уравнения (3). Мы будем рассматривать неавтономный случай.

Если переносить соотношения вида (3) на неавтономный случай, то нужно сравнивать некоторые «базовые» решения $\xi_k(t)$ между собой. Поскольку они могут быть колеблющимися, мы выдвигаем гипотезу исследования в следующем виде.

Гипотеза 1. Для некоторого натурального числа $n>1$ существуют такие решения $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ начальной задачи (1) и такое число $M=const>0$, что для любое решение $W(t, \varphi(\cdot))$ будет асимптотически эквивалентно сумме $C_1(\varphi(\cdot))\xi_1(t) + C_2(\varphi(\cdot))\xi_2(t)+\ldots+C_n(\varphi(\cdot))\xi_n(t)$ по функции $\left(max\{|\xi_n(s)|: t-M \le s \le t\}\right)^{-1}$ при достаточно малом запаздывании.

3. Гипотеза для уравнений устойчивого типа

Для подтверждения этой гипотезы для уравнений устойчивого типа $(P(t)<0)$ мы провели следующие построения. Ее уточнение для таких уравнений с $n=2$ назовем *Гипотеза 2.*

Возьмем начальную функцию $\varphi_1(t)=1$ при $t=0$ и $\varphi_1(t)=0$ при $t<0$, и еще две случайно выбранных начальных функции $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$. Они, соответственно, дают три решения, которые можно записать в виде

$$X_1(t)=X(t, \varphi_1(\cdot)) \equiv \xi_1(t),\ X_2(t)= X(t,\varphi_2(\cdot))=c_{21}\xi_1(t)+ c_{22}\xi_2(t)+ \eta_2(t),$$
$$X_3(t)= X(t,\varphi_3(\cdot))=c_{31}\xi_1(t)+ c_{32}\xi_2(t)+\eta_3(t). \tag{4}$$

Гипотеза состоит в том, что существуют такие коэффициенты $c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$ и функция $\xi_2(t)$, что

$X_2(t)\sim c_{21}\xi_1(t)$ и $X_3(t)\sim c_{31}\xi_1(t)$ по функции $1/\xi_1(t)$;

$X_2(t)\sim c_{21}\xi_1(t)+ c_{22}\xi_2(t)$ и $X_3(t)\sim c_{31}\xi_1(t)+ c_{32}\xi_2(t)$ по функции $1/\xi_2(t)$.

Построение. Поскольку функции $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ выбраны случайно, должны быть $c_{21}\ne 0$, $c_{31}\ne 0$. Тогда должно выполняться

1-е следствие Гипотезы 2: существуют пределы

$$lim\{ X_2(t)/ X_1(t)|\ t\to\infty\}= p_{21} \ne 0,\ lim\{ X_2(t)/ X_1(t)|\ t\to\infty\}= p_{31} \ne 0. \tag{5}$$

Если это следствие подтверждается, тогда находим: $c_{21} = p_{21}$, $c_{31} = p_{31}$.

Подставляя в (4), получим

$X_2(t)= p_{21}\xi_1(t)+ c_{22}\xi_2(t)+ \eta_2(t),\ X_3(t)= p_{31}\xi_1(t)+ c_{32}\xi_2(t)+ \eta_3(t).$

Вводя соответствующие обозначения, получаем

$Y_2(t):= X_2(t) - p_{21} X_1(t)=(c_{22} - p_{21})\xi_2(t)+ \eta_4(t),$

$Y_3(t):= X_3(t) - p_{31} X_1(t)=(c_{32} - p_{31})\xi_2(t)+ \eta_5(t),$

где обозначены некоторые функции $\eta_4(t)\sim o(\xi_2(t))$, $\eta_5(t)\sim o(\xi_2(t))$ при $t \to \infty$.

2-е следствие Гипотезы 2: существуют пределы

$$lim\{ Y_2(t)/ X_1(t)|\ t\to\infty\}= 0,\ lim\{ Y_2(t)/ X_1(t)|\ t\to\infty\}= 0.$$

С математической точки зрения, эти соотношения являются непосредственными следствиями равенств (5), но с вычислительной точки зрения они являются дополнительной проверкой правильности вычисления чисел p_{21} и p_{31}.

Поскольку решения были выбраны случайно, должно быть
$c_{22}-p_{21}\neq 0,\ c_{32}-p_{31}\neq 0.$ Тогда должно выполняться

3-е следствие Гипотезы 2: существует предел

$$lim\{ Y_3(t)/ Y_2(t)|\ |\ Y_2(t)| >\Omega_2(t),\ t\to\infty\}\neq 0, \tag{6}$$

где $\Omega_2(t)$ – некоторая положительная функция такая, что сколь угодно далеко вправо существуют такие точки, для которых $|Y_2(t)|>\Omega_2(t)$.

Выполнение этих трех следствий подтверждает гипотезу.

4. Переход к разностному уравнению и подтверждение гипотезы

Не умаляя общности, заменой независимой переменной можно считать, что h – натуральное число. Шаг по t возьмем равным 1.

Обозначим $A[m]=P(m),\ X[m]\approx x(m),\ m= 1,2,\ \ldots,$

$$X[m]=\varphi(m),\ m= -h,\ -h+1,\ldots,0. \tag{7}$$

Тогда из (1) получаем для любого n:

$$X[m]=X\,[m-1]+A[m]X[\ m-h-1],\ m=1,2,3,\ldots,n. \tag{8}$$

Поскольку решения задачи (1) могут обращаться в нуль, непосредственное вычисление отношений вида (6) без $\Omega_2(t)$ может привести к аварийной остановке программы. Поэтому было выбрано $\Omega_2(t)= 0.00001$.

Начальные условия были взяты следующие:

$$X_1[-h..,0]= \{0..0,1\};\ X_2[-h..\ -[h/2]..0]= \{0..0,1,0..0\};\ X_3[-h..0]= \{1,0..0\},$$

$X_4[-h..\ -[h/3]..0]= \{0..0,1,0..0\}$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа).

Также исходными данными являются нижняя и верхняя граница диапазона для (безразмерной величины) $P(t)h$.

Значения $A[1],\ \ldots,\ A[n]$ выбираются случайно – нижняя или верхняя граница указанного пользователем диапазона.

Таким образом, была подтверждена Гипотеза 2 для $-0.3\leq P(t)h\leq -0.1$.

Вывод

Числовые эксперименты на компьютере могут применяться для решений различных динамических систем с целью установления качественных и асимптотических свойств пространства решений, что потом может быть доказано другими методами.

Список литературы:

1. **Пинни, Э.** Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения [Текст] / Э. Пинни. – М.: Иностранной литературы, 1961. – 248 с.
2. **Мышкис, А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [Текст] / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 351 с.
3. **Жээнтаева, Ж.К.** Исследование асимптотики решений уравнений с малым запаздыванием [Текст] / Ж.К. Жээнтаева. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 64 с.
4. **Жээнтаева, Ж.К.** Кечигүү менен сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын мейкиндикти ажыратуу жана далил бөлө алуучу эсептөөлөр жардамында изилдөө [Текст] / П.С. Панков, Ж.К. Жээнтаева // Доклады НАН КР, 2017.-№ 1.- С. 10-14.
5. **Жээнтаева, Ж.К.** Методика экспериментального исследования асимптотики решений уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Ж.К. Жээнтаева // Наука. Образование. Техника.- Ош: КУУ, 2017.-№ 2. - С. 26-29.
6. **Панков, П.С.** Асимптотическая эквивалентность решений эволюционных уравнений на полуоси [Текст] / П.С.Панков, Ж.К. Жээнтаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана.- Бишкек, 2019.-№ 12.- С. 69-72.
7. **Жээнтаева, Ж.К.** Условия для существования специальных решений уравнений с запаздывающим аргементом [Текст] / Ж.К.Жээнтаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2018. – №1. – С. 41– 47.

Поступила в редакцию 22.05.2021 г.