2. **Borubaev, A.A.** Spaces Uniformed by Coverings [Текст] / A.A.Borubaev, P.S. Pankov, A.A. Chekeev. - Budapest: Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, 2003. – 169 p.
3. **Жораев, А.Х.** Исследование топологических пространств кинематическим методом [Текст] / А.Х. Жораев // Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Aca-demic Publishing, 2017. – 78 c.
4. **Жораев, А.Х.** Индуктивное определение кинематической размерности топо-логических пространств [текст] / А.Х. Жораев // Вестник Института математики НАН КР. - Бишкек, 2018.- №1. - С. 139-144.
5. **Жораев, А.Х.** Кинематическая размерность топологических пространств [Текст] / П.С.Панков, А.Х. Жораев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019.- № 2. - С. 103-106.
6. **Жораев, А. Х.** Определение обобщенных кинематических пространств при помощи связных множеств [Текст] / А.Х. Жораев // Наука. Образование. Техника.- Ош: КУМУ, 2022.- № 1. - С. 41-45.
7. **Александров, П. С.** Введение в теорию размерности [Текст] / П.С. Александров, Б. А. Пасынков. – М.: Наука, 1973. – 577 с.
8. **Pankov, P.S.** Mathematical Models for Independent Computer Presentation of Turkic Languages [текст] / P.S.Pankov, B.J.Bayachorova, M.Juraev // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume.- 2012. – Pp. 92-102.
9. **Панков, П.С.** Методика экспериментального исследования свойств кинематических пространств [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2017. – №2. – С. 23– 26.

Поступила в редакцию: 10.01.2024 г.

УДК 517.929

Жээнтаева Ж.К.
к.ф.-м.н., доц. Кырг. -Узбекского Межд. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика

КЕЧИГҮҮЧҮ АРГУМЕНТИ МЕНЕН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТЕОРИЯСЫНДАГЫ АЛГОРИТМДЕР

Бул жумушта убакыттын чексиз көбөйүшүндө чектелген кечигүү менен сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык касиетин аныктоо маселеси каралды. Мурда жарыяланган макалаларда мындай көйгөйлөрдү системалуу изилдөөдө жарым огу боюнча аныкталган функциялардын көптүгү үчүн убакыттын чексиз көбөйүшүндө асимптотикалык эквиваленттүүлүктүн аныктамасы киргизилген: эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө умтулат. Ошондой эле чыгарылыштар мейкиндигинде асимптотикалык эквиваленттүүлүктүн болушун камсыз кылуучу теңдемелердин коэффициенттеринин аймактарын эксперименталдык түрдө аныктоо жана чыгарылыштар мейкиндигинде асимптотикалык эквиваленттүүлүктүн бар экендигин далилдөө боюнча эсептөөлөр жүргүзүлгөн. Бул жумушта сунушталган убакыттын чексиз көбөйүшүндө чектелген кечигүү менен сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык касиеттерин орнотуу үчүн компьютерди колдонуунун жалпы ыкмасы башка маселелер үчүн да колдонулушу мүмкүн.

Негизги сөздөр: *сандык тажрыйба; далил боло алуучу эсептөө; дифференциалдык теңдеме; кечигүүчү аргумент; баштапкы маселе.*

АЛГОРИТМЫ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В данной работе рассматривается проблема установления асимптотического свойства решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием при неограниченном увеличении времени. В ранее опубликованных статьях для систематического исследования таких проблем было введено определение асимптотической эквивалентности при *неограниченном увеличении времени для множеств функций, определенных на полуоси: расстояние между двумя решениями стремится к нулю. Также были проведены вычисления для экспериментального определения областей коэффициентов уравнений, обеспечивающих наличие асимптотической эквивалентности в пространстве решений, и для доказательства наличия асимптотической эквивалентности в пространстве решений. Общая методика применения компьютера для установления асимптотического свойства решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием при неограниченном увеличении времени, предложенная в данной статье, может быть использована для других задач.*

Ключевые слова: *численный эксперимент; доказательные вычисления; дифференциальное уравнение; запаздывающий аргумент; начальная задача.*

ALGORITHMS IN ASYMPTOTICAL THEORY OF SOLUTIONS OF EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

The article deals with the problem of establishing the asymptotic behavior of solutions to initial problems for linear differential equations with bounded delay with an unbounded increase of time. In previously published papers, to systematically study such problems, the definition of asymptotic equivalence with infinite time increase was introduced for sets of functions defined on the half-axis: the distance between two solutions tends to zero. Also, calculations were carried out to experimentally determine the areas of coefficients of the equations that ensure the presence of asymptotic equivalence in the space of solutions, and to prove the presence of asymptotic equivalence in the space of solutions. The general technique for using a computer to establish the asymptotic behavior of solutions to initial problems for linear differential equations with bounded delay with an unlimited increase in time, proposed in this article, can be used for other problems.

Keywords: *numerical experiment; validating computations; differential equation; retarded argument; initial value problem*

Введение. В этой работе рассматривается проблема установления асимптотического поведения решений начальных задач (будем кратко записывать НЗ) для линейных дифференциальных уравнений (будем кратко записывать ДУ) с ограниченным запаздыванием при неограниченном увеличении времени. В ранее опубликованных статьях для систематического исследования таких проблем было введено определение асимптотической эквивалентности (АЭ) при неограниченном увеличении времени для множеств функций, определенных на полуоси. Также, были проведены вычисления для экспериментального определения областей коэффициентов ДУ, при которых возможна АЭ в пространстве решений, и для доказательства наличия АЭ в пространстве решений НЗ. В данной работе вопрос о применении компьютера для установления асимптотического поведения решений НЗ для линейных ДУ с ограниченным запаздыванием при неограниченном увеличении времени рассмотрен в общем виде.

В первом разделе представлены необходимые определения, в том числе введенное нами понятие асимптотической эквивалентности [6].

Во втором разделе описана постановка НЗ для ДУ с запаздывающим аргументом. Для таких ДУ в работах ряда авторов, в том числе в [1], [2] (см. обзор в [3] и результат [4]) было установлено, что асимптотическое поведение решений НЗ (образующих бесконечномерное множество) определяется не знаками (положительными, отрицательными) некоторых коэффициентов в ДУ, а величиной запаздывания. Нами эти результаты были обобщены на некоторые типы операторных уравнений. Также было установлено, что в построении указанной асимптотики ведущую роль играет конечномерное пространство так называемых «специальных» решений НЗ для ДУ. Это понятие также было обобщено нами на операторные уравнения.

В третьем разделе описана в усовершенствованном виде предложенная нами [5] и примененная в [7] методика численных экспериментов для исследования свойств решений НЗ для ДУ.

В четвертом разделе показано применение доказательных вычислений для получения строгих результатов, расширяющих результаты, упомянутые во втором разделе.

1. Определения асимптотической эквивалентности и асимптотического фактор-пространства

Сначала запишем решения динамических систем в наиболее общем виде.

Будем предполагать, что аргумент t неизвестных функций принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ (непрерывного или дискретного времени), имеющему наименьший элемент (будем обозначать его «0»), но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется $\Lambda=\boldsymbol{R}_+\equiv[0,\infty)$ или $\Lambda=\boldsymbol{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$. Также обозначим $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

Здесь, мы рассматриваем только НЗ. Предполагается, что НЗ всегда имеет решение и оно единственно и продолжается на все множество Λ. Тогда пространство решений НЗ с начальным условием *представимо* в виде оператора

$$W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z,$$

где Φ - топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений НЗ. В случае $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ будем предполагать, что $W(t,\varphi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z:

прямую ($\boldsymbol{R}$);

эвклидовы пространства ($\boldsymbol{R}^d$);

линейные нормированные пространства;

метрические пространства.

О п р е д е л е н и е 1. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ называется отношением АЭ по заданной функции $\psi\colon\Lambda\to\boldsymbol{R}_{++}$.

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1\sim_{\psi(t)}\varphi_2)\Leftrightarrow(\lim\{\ \psi(t)||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z\colon t\to\infty\}=0).$$

Если Z - метрическое пространство, то

$$(\varphi_1\sim_{\psi(t)}\varphi_2)\Leftrightarrow(\lim\{\ \psi(t)\rho_Z(W(t,\varphi_1),W(t,\varphi_2))\colon t\to\infty\}=0).$$

При $\psi(t)\equiv 1$ мы назвали это отношение «отношением АЭ».

В качестве «функций сравнения ψ» обычно используются экспоненциальные функции. Поэтому нами введено также.

О п р е д е л е н и е 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ называется отношением λ-экспоненциальной АЭ $(\lambda>0)$:

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1\sim\varphi_2)\Leftrightarrow(\sup\{\ ||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z\exp(\lambda t)\colon t\in\Lambda\}<\infty).$$

Если Z - метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\sup\{ \rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \exp(\lambda t): t \in \Lambda\} < \infty).$$

Данные определения использованы для исследования асимптотики.

2. Дифференциальное уравнение с запаздыванием

Рассматривается для $Z=\boldsymbol{R}$ (скалярное) ДУ с НЗ вида

$$x'(t) = \begin{cases} P(t)\varphi(t-h), t \in [0,h] \\ P(t)x(t-h), t \in (h,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

$$x(0) = \varphi(0)$$

для $x(t) \in C(\boldsymbol{R}_+)$, где $\varphi(t) \in \Phi = C[-h,0]$ и $P(t) \in C(\boldsymbol{R}_+)$ – заданные функции.

П р и м е ч а н и е. Для автономного ДУ $(P(t)=p=const)$ полное асимптотическое представление решений НЗ (1) при $t \to \infty$ дает теория Флоке (см. например, [1], [2]): алгебраическое характеристическое уравнение $\lambda = p \cdot \exp(-\lambda h)$ имеет бесконечное количество решений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ в комплексной плоскости, таких, что $\lim \{ Re\lambda_k \,|k \to \infty\} = -\infty$, и решение ДУ представимо в виде сходящегося или асимптотического ряда

$$X(t;\varphi(\cdot)) = C_1\varphi(\cdot) \exp(\lambda_1 t) + C_2\varphi(\cdot)\exp(\lambda_2 t) + \ldots + C_k\varphi(\cdot)\exp(\lambda_k t) + \ldots, \tag{2}$$

где C_k - некоторые линейные функционалы. Таким образом, исследование автономного ДУ сводится к исследованию алгебраического уравнения. Мы будем рассматривать неавтономный случай.

3. Гипотезы и использование компьютеров для их проверки

Если переносить соотношения вида (2) на неавтономный случай, то нужно сравнивать некоторые «базовые» решения $\xi_k(t)$ между собой:

Г и п о т е з а 1-n. Для некоторого числа $n>1$ из $\boldsymbol{N}$ существуют такие (ненулевые для сколь угодно больших значений аргумента) решения $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ НЗ для ДУ (1) и такое число $M=const>0$, что для любое решение $W(t, \varphi(\cdot))$ будет асимптотически эквивалентно сумме

$$C_1(\varphi(\cdot))\xi_1(t) + C_2(\varphi(\cdot))\xi_2(t) + \ldots + C_n(\varphi(\cdot))\xi_n(t)$$

по функции $\left(max\{|\xi_n(s)|: t - M \le s \le t\}\right)^{-1}$ при $h<<1$.

Основным положением, на которое мы будем опираться в экспериментах, является (*) «случайное число из $\boldsymbol{R}$ не равно нулю».

Для подтверждения Гипотезы 1-2 для ДУ устойчивого типа $(P(t)<0)$ мы провели следующие построения.

Выберем начальную функцию $\varphi_1(t)=1$ при $t=0$ и $\varphi_1(t)=0$ при $t<0$, и еще две случайные начальные функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$. Они, соответственно, дают три решения, которые можно записать в виде

$$X_1(t)=X\ (t,\ \varphi_1(\cdot)\ )\equiv \xi_1(t),\ X_2(t)=X(t,\varphi_2(\cdot))=c_{21}\xi_1(t)+c_{22}\xi_2(t)+\ \eta_2(t),$$

$$X_3(t)=X(t,\varphi_3(\cdot))=c_{31}\xi_1(t)+c_{32}\xi_2(t)+\eta_3(t). \qquad (3)$$

Гипотеза состоит в том, что существуют такие коэффициенты c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32} и функция $\xi_2(t)$, что $X_2(t)\sim c_{21}\xi_1(t)$ и $X_3(t)\sim c_{31}\xi_1(t)$ по функции $1/\xi_1(t)$;

$X_2(t)\sim c_{21}\xi_1(t)+c_{22}\xi_2(t)$ и $X_3(t)\sim c_{31}\xi_1(t)+c_{32}\xi_2(t)$ по функции $1/\xi_2(t)$.

В силу (*) должно быть $c_{21}\neq 0$, $c_{31}\neq 0$. Тогда должно выполняться

1-е следствие Гипотезы 1-2: существуют пределы

$$lim\{\ X_2(t)/\ X_1(t)|\ t\to\infty\}=p_{21}\neq 0,\ lim\{\ X_2(t)/\ X_1(t)|\ t\to\infty\}=p_{31}\neq 0. \qquad (4)$$

Если это следствие подтверждается, тогда находим: $c_{21}=p_{21}$, $c_{31}=p_{31}$.

Подставляя в (3), получим

$$X_2(t)=p_{21}\xi_1(t)+c_{22}\xi_2(t)+\ \eta_2(t),\ X_3(t)=p_{31}\xi_1(t)+c_{32}\xi_2(t)+\ \eta_3(t).$$

Вводя соответствующие обозначения, получаем

$$Y_2(t):=X_2(t)-p_{21}\ X_1(t)=(c_{22}-p_{21})\xi_2(t)+\ \eta_4(t),$$

$$Y_3(t):=X_3(t)-p_{31}\ X_1(t)=(c_{32}-p_{31})\xi_2(t)+\ \eta_5(t),$$

где обозначены некоторые функции $\eta_4(t)\sim o(\xi_2(t))$, $\eta_5(t)\sim o(\xi_2(t))$ при $t\to\infty$.

2-е следствие Гипотезы 1-2: существуют пределы

$$lim\{\ Y_2(t)/\ X_1(t)|\ t\to\infty\}=0,\ lim\{\ Y_2(t)/\ X_1(t)|\ t\to\infty\}=0.$$

Эти соотношения являются непосредственными следствиями равенств (4), а также - дополнительной проверкой правильности вычисления чисел p_{21} и p_{31}.

В силу (*) должно быть $c_{22}-p_{21}\neq 0$, $c_{32}-p_{31}\neq 0$. Тогда должно выполняться *3-е следствие Гипотезы 1-2*: существует предел

$$lim\{\ Y_3(t)/\ Y_2(t)|\ |\ Y_2(t)|>\Omega_2(t),\ t\to\infty\}\neq 0, \qquad (5)$$

где $\Omega_2(t)$ – некоторая положительная функция такая, что сколь угодно далеко вправо существуют такие точки, для которых $|Y_2(t)|>\Omega_2(t)$.

Выполнение этих трех следствий подтверждает гипотезу.

Не умаляя общности, заменой независимой переменной можно считать, что $h\in \mathbf{N}$. Шаг по t возьмем равным 1.

Обозначим $A[m]=P(m)$, $X[m]\approx x(m)$, $m=1,2,\ \ldots,\ X[m]=\varphi(m)$,

$m= -h, -h+1,\ldots,0.$ Тогда из НЗ для ДУ (1) получаем:

$$(\forall m \in \mathbf{N})\ X[m]=X[m-1]+A[m]X[m-h-1]. \tag{6}$$

Поскольку решения НЗ для ДУ (1) могут обращаться в нуль, непосредственное вычисление отношений вида (5) было выбрано $\Omega_2(t)= 0.00001$. Начальные условия:

$$X_1[-h..,0]=\{0..0,1\};\ X_2[-h..-[h/2]..0]=\{0..0,1,0..0\};\ X_3[-h..0]=\{1,0..0\},$$

$X_4[-h..-[h/3]..0]=\{0..0,1,0..0\}$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа).

Также исходными данными являются границы для (безразмерной величины) $P(t)h$. Значения $A[1], \ldots, A[n]$ выбираются случайно – нижняя или верхняя граница диапазона. Таким образом, была подтверждена Гипотеза 2 для $-0.3 \le P(t)h \le -0.1$.

4. Доказательные вычисления на компьютерах

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Пусть $a_n \in \mathbf{R}$; операторы $b_n:\Omega \to \mathbf{R}$ (функционал); $c_n: R \to \Omega$; $d_n:\Omega \to \Omega$, $n \in \mathbf{N}$ с ограничениями $a_n \in A=[a_-,a_+]$; $||b_n|| \le b>0$, $||c_n|| \le c>0$, $||d_n|| \le d>0$.

Рассмотрим систему разностных уравнений в $R \times \boldsymbol{\Omega}$

$$x_{n+1}= a_n x_n + b_n y_n,\ y_{n+1}= c_n x_n + d_n y_n,\ n=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Доказаны

Т е о р е м а 1. Если существует такое $v>0$, что 1) $q_- := a_- - vb>0$;

2) $c+vd \le vq_-$, то существует такое (названное специальным) решение $\{X, Y\}$, что $(\forall n \in N)(X_n \ge q_-^{\,n};\ ||Y_n|| \le vX_n)$.

Т е о р е м а 2. Обозначим $w:= a_- - d$. Если 1) $w>0$;

2) $\zeta:= w^2-4bc>0$,

то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1. Можно взять $v=(w-\sqrt{\zeta})/(2b)$.

Т е о р е м а 3. Если $\omega:=(a_+d + bc)\,q_-^{-2}<1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\}:=\lim\{x_n/X_n: n\to\infty\}$.

Т е о р е м а 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ +bv)<1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$: $\lim\{|x_n-\gamma\{x, y\}X_n|: n\to\infty\}= 0$.

Эти результаты можно применить к ДУ (1):

Представим пространство $C[-h,0]$ в виде прямого произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0)=0$. Обозначим $Z_m(t):=W(t+mh,\varphi(\cdot))$, $-h \le t \le 0$, $m \in \mathbf{N}$; $S_mZ(\cdot)(t)$ – интегральные операторы сдвига по траекториям ДУ (1) на шаг h.

Полагая $Z(t)\equiv|t|$, оцениваем:

$$[a_-, a_+] = 1+h[p_-, p_+]=[1+hp_-,1+hp_+];\ b= h\max\{|p_-|, |p_+|\},\ c=b;\ d=b.$$

Доказательными вычислениями (общая методика, в том числе направленное округление, разбиение на подобласти, была предложена в [8] доказана.

Т е о р е м а 5. Абсолютная область наличия асимптотически аппроксимирующего свойства специальных решений для ДУ (1) включает в себя:

$$P(t)h \in [-0.12;\ 0.39] \vee [-0.10,\ 0.40] \vee [-0.08;\ 0.41] \vee [-0.06; 0.42] \vee$$

$$[0.04;\ 0.43] \vee [-0.02;\ 0.44].$$

Эти результаты дополняют результат, упомянутый в [1], [2].

$P(t)h \in [-0.367\ldots;\ 0.367\ldots].$

Вывод

Для повышения эффективности исследования различных проблем теории динамических систем предлагается комбинированное использование возможностей компьютера: как поиск формулировок теорем при помощи различных численных экспериментов, так и строгое доказательство теорем с помощью известных методов: алгебраических преобразований и доказательных вычислений.

Список литературы:

1. **Пинни, Э.** Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ. [Текст] / Э. Пинни. - Москва: Иностранной литературы, 1961. – 248 с.
2. **Мышкис, А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [Текст] / А.Д. Мышкис. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
3. **Жээнтаева, Ж.К.** Исследование асимптотики решений уравнений с малым запаздыванием [Текст] / Ж.К. Жээнтаева. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 64 с.
4. **Жээнтаева, Ж.К.** Кечигүү менен сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын мейкиндикти ажыратуу жана далил боло алуучу эсептөөлөр жардамында изилдөө [Текст] / П.С. Панков, Ж.К. Жээнтаева // Доклады НАН КР.- 2017.- № 1.- С. 10-14.
5. **Жээнтаева, Ж.К.** Методика экспериментального исследования асимптотики решений уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Ж.К. Жээнтаева // Наука. Образование. Техника.- Ош: КУУ, 2017.- № 2. - С. 26-29.
6. **Жээнтаева, Ж.К.** Асимптотическая эквивалентность решений эволюционных уравнений на полуоси [Текст] / П.С.Панков, Ж.К. Жээнтаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана.-2019.- №12. - С. 69-72.
7. **Жээнтаева, Ж.К.** Численные эксперименты по асимптотической эквивалентности решений уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Ж.К. Жээнтаева // Наука. Образование. Техника.- Ош: КУМУ, 2021.-№ 2 (71).- С. 26-32.
8. **Панков, П.С.** Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах [Текст] / П.С. Панков. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
9. **Жээнтаева, Ж.К.** Условия для существования специальных решений уравнений с запаздывающим аргементом [Текст] / Ж.К.Жээнтаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2018. – №1. – С. 41– 47.

Поступила в редакцию: 11.01.2024 г.