Issue X, 2015. – Pp.54-64.
3. **Alymkulov, K.** Perturbed differential equation with singular points and some bifurcations problems [Текст] / K. Alymkulov.- B.: Ilim, 1992. – 108 p.
4. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда решение невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке [Текст] / А.А. Халматов // Известия Ошского технологического университета.- Ош: ТУ, 2018.-
5. С. 177-180.
6. **Халматов, А.А.** Обобщенный метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка [Текст] / А.А.Халматов // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. - №3 (66).- С. 23-27.
7. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Труды междун. науч. конфер. посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского универ. – Вып. 4. – Ош, 2014. – С. 119-121.
8. **Tursunov, D.A.** Asymptotics of the solution to the boundary-value problems with non smooth coefficient. [Text] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, A.A. Halmatov // Lobacevskii Journal of Mathmatics. - 2020. - T.41.- №6. – Pp.1115-1122.

DOI: 10. 54834 / 16945220_2021_3_34

Поступила в редакция 12. 09. 2021 г.

УДК 517.928

Алыбаев К. С.
д. ф-м.н., проф. Джалал-Абадского госуд. универ. им. Б. Осмонова, Кыргызская Республика
Матанов Ш. М.
преп. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

АШУУ ЧЕКИТИНЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН БЕРНУЛЛИНИН ТЕҢДЕМЕСИНИН ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТЕОРИЯСЫ

Бул макалада ашуу чекитине ээ болгон сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме каралды. Алгачкы эмгектерди колдонуу менен чек-аралык катмар сызыктарынын, чек-аралык катмар аймактарынын жана тартылуу аймактарынын аныктамалары берилген. Кабыл алынган аныктамаларга ылайык тартылуу аймактарын, чек аралык катмар аймактарын жана сызыктарын, регулярдуу жана сингулярдуу аймактарды изилдөө жана олуттуу айырмачылыктарды белгилөө милдети коюлду. Конформдык өзгөртүп түзүүнү колдонуу менен маселе стандарттуу түргө келтирилди, гармониялык функциялардын деңгээл сызыктарын колдонуу менен аймактардын геометриялык сүрөттөлүштөрү жүргүзүлдү. Бардык өзгөртүп түзүүлөр тиешелүү сүрөттөр менен коштолду. Келечекте бул иштин натыйжалары комплекстик областагы сингулярдык козголгон теңдемелердин теориясын өнүктүрүүдө колдонсо болот. Алынган натыйжалар ар кандай стационардык абалда боло турган кубулуштарды изилдөө үчүн колдонулушу мүмкүн. Ачылган жаңы чек аралык катмар сызыктары жана аймактары жалпы түрдөгү теңдемелерде орун алат.

Негизги сөздөр: *сингулярдык козголуу; чек аралык катмар сызыгы; чек аралык катмар аймагы; тартылуу аймагы; деңгээл сызыктары.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ С ТОЧКОЙ ПЕРЕВАЛА

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение с точкой перевала. Приведены определения погранслойных линий, погранслойных областей, областей притяжения из *ранних работ. Согласно принятых определений поставлена задача исследования областей притяжения, погранслойных областей и линий, регулярных и сингулярных областей, и отметить существенные различия. Применением конформного преобразования, задача приведено к стандартному виду, проведены геометрические построения областей с использованием линии уровней гармонических функций. Все построения сопровождены соответствующими рисунками. В дальнейшем результаты данной работы можно использовать для теории сингулярно возмущенных уравнений в комплекной области. Полученные результаты можно использовать при исследовании явлений, которые могут находится в различных стационарных состояниях. Обнаруженные новые погранслойные линии и области имеют место для уравнений более общего вида.*

Ключевые слова: *сингулярное возмущение; погранслойная линия; погранслойная область; область притяжения; линии уровня.*

GEOMETRIC THEORY OF A SINGULARLY PERTURBED BERNULLI EQUATION WITH A PASS POINT

In this article, we consider a singularly perturbed equation with a saddle point. The definitions of boundary-layer lines, boundary-layer regions, and areas of attraction from early works are given. According to the adopted definitions, the task was set to study the regions of attraction, boundary layer regions and lines, regular and singular regions, and to note significant differences. By applying a conformal transformation, the problem is reduced to a standard form, geometric constructions of regions are carried out using the line of levels of harmonic functions. All constructions are accompanied by corresponding figures. In the future, the results of this work can be used for the theory of singularly perturbed equations in the complex domain. The results obtained can be used to study phenomena that can be in various stationary states. The discovered new boundary-layer lines and regions take place for equations of a more general form.

Key words: *singular perturbation; boundary layer line; boundary layer region; attraction domainlevel lines.*

Вводная часть

В ранних работах [1-5] исследованы асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений (с.в.у) не имеющие точек перевала в комплексных областей. В [1-3] рассмотрены линейные и слабо нелинейные с.в.у первого порядка. Соответсвующие невозмущенные уравнения имеют единственные решения. Введены новые понятия: погранслойные линии, регулярные и сингулярные области, и доказаны их существования. В [4-5] рассмотрены с.в.у (без точек перевала), невозмущенные уравнения которых имеют несколько решений. Доказаны существования областей, притяжения, в комлексных областях, решений с.в.у к решениям невозмущенных уравнений, а также исследованы взаимосвязи областей притяжений и их зависимость от начальных значений независимой переменной. Для таких классов уравнений не исследованы существования погранслойных линий, регулярных и сигулярных областей.

В предлагаемой работе рассматривается с.в.у Бернулли с точкой перевала в комплексных областях.

Объект исследования и постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + x^2(t,\varepsilon), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0 \quad , \tag{2}$$

где, $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр;

$t \in D \subset C$ и D – односвязная, ограниченная открытая область; $t_0 \in D$

Пусть выполняются условия:
У.1. $a(t) \in Q(D)$ – пространсво аналитических функций в D.
Из (1) пологая $\varepsilon = 0$ получим невозмущенное уравнение.

$$a(t)\xi(t) + \xi^2(t) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет решения

$\xi_1(t) \equiv 0, \ \xi_2(t) = -a(t).$
Пусть: У.2. $\exists! \ \mathrm{T}_0 \in D \wedge (a(\mathrm{T}_0) = 0, \ a'(\mathrm{T}_0) \neq 0)$

Определение 1. Если $A(\mathrm{T}_0) = 0, \ A'(\mathrm{T}_0) = 0, \ldots, A^{(n)}(\mathrm{T}_0) = 0, A^{(n+1)}(\mathrm{T}_0) \neq 0,$ то точка T_0 называется n кратной точкой перевала.
При $n = 1$, точка перевала называется простой.
Определим функцию

$$A_0(t) = \int_{T_0}^{t} a(s)ds.$$

Согласно У.2. функция $A_0(t)$ в области D имеет единственную простую точку перевала.

Определение 2. Если: 1. Существует область $D_j \subset D$ и $x(t,\varepsilon)$-решение задачи (1) - (2) определенное в D_j.
2. $\forall t \in D_j \ (x(t,\varepsilon) \to \xi_j(t)$ по $\varepsilon)$, то область D_j называется областью притяжения решения $x(t,\varepsilon)$ к решению $\xi_j(t)$ и обозначается

$$D_j\left(x(t,\varepsilon) \to \xi_j(t)\right).$$

Сформулируем следующие определение из [1 - 3]:

Определение 3. Если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t_0,\varepsilon)$ не существует, но $|x(t_0,\varepsilon)|$- ограничена, то точка t_0 называется погранслойной точкой.

Определение 4. Множество погранслойных точек называется погранслойной областью.

Определение 5. Погранслойной область являющееся локально взаимно однозначным образом прямолинейного отрезка называется погранслойной линией.

Определение 6. Если $\forall t \in D \left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = x_0(t)\right)$, то D называется регулярной областью.

Определение 7. Если $\forall t \in D \left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = \infty\right)$, то D называется сингулярной областью.

Согластно принятых определений исследуем решение задачи (1) - (2) на существование областей притяжения, погранслойных линий и областей, регулярных и сингулярных областей.

Решение задачи

Решение задачи разделим на несколько частей:

1. Приведение задачи к более простому виду;
2. Геометрические построения;
3. Асимптотическое поведение решений.

1. Приведение задачи к более простому виду

Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon)=\left(\varepsilon x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon}\right)\Big/\left(\varepsilon-x^0\int_{t_0}^{t}exp\frac{A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right), \tag{4}$$

где, $A(t)=\int_{t_0}^{t}a(s)ds.$

Нетрудно проверить следующую взаимосвязь функций

$A(t)$ и $A_0(t)$: $A(t)=A_0(t)-A_0(t_0)$.

Функция $A_0(t)$ в точке $t=T_0$ имеет двухкратный нуль и она представляется в виде

$$A_0(t)=(t-T_0)^2A_1(t)\ \ (A_1(T_0)\neq 0) \tag{5}$$

Проведем следующее преобразование

$$u=(t-T_0)A_1^{\frac{1}{2}}(t), \tag{6}$$

где, $A_1^{\frac{1}{2}}(t)$- любая непрырывная ветвь корня $\sqrt{A_1(t)}$. Преобразование (6) локально взоимоднозначно и конформно в окрестности точки T_0. Дейсвительно из (6) имеем

$$\frac{du}{dt}=A_1^{\frac{1}{2}}(t)+(t-T_0)A_1^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Отсюда пологая $t=T_0$ получим $\frac{du}{dt}=A_1^{\frac{1}{2}}(T_0)\neq 0.$

Если учесть (4)-(5), имеем

$$A_0(t)=u^2 \tag{7}$$

Подведя итог можем сказать, если в (4) произвести преобразование (5) функцию $A_0(t)$ можно представить в виде (7).

При преобразовании (6) некоторая окрестность точки T_0 переходит в круг Ω радиуса r_0 с центром в точке (0;0), плоскости $(u=u_1+iu_2)(u_1,u_2)$.

Таким образом, проведя преобразование (6) вместо функции (4) можно рассмотреть функцию

$$x(t,\varepsilon)=\left(\varepsilon x^0 exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\Big/\left(\varepsilon-x^0\int_{t_0}^{t}exp\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}d\tau\right). \tag{8}$$

В (8) вместо переменной u оставили старое обозначение t. Заметим после преобразованию (6) $\int_{t_0}^{t}exp\frac{A(\tau)}{\varepsilon}d\tau$ переходит в интеграл вида $\int_{u_0}^{u}\varphi(\tilde{u})exp\frac{\tilde{u}^2-u_0^2}{\varepsilon}d\tilde{u}$, где $\varphi(\tilde{u})$

– некоторая аналитическая функция в круге Ω. В дальнейших исследованиях роль $\varphi(\tilde{u})$ несущественна поэтому рассмотрим (8).

2. Геометрические построения

Для исследования функции (8) проведем некоторые геометрические построения. Пусть задана функция $F(t_1, t_2)$ определенная в области $D \subset R^2$.

Определение 8. Множество $(p) = \{(t_1, t_2) \in D, F(t_1, t_2) = p - const\}$ называется линией уровня функций $F(t_1, t_2)$ в области D.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_{00}) = \{t \in \Omega \subset D, \qquad Ret^2 = 0\}, \qquad \Omega = \{t \in C, |t| < r_0\}$$

Линия уровня (p_{00}) проходит через начало координат и круг Ω разделяет на четыре сектора, с центральными углами $\frac{\pi}{2}$ (рисунок 1).

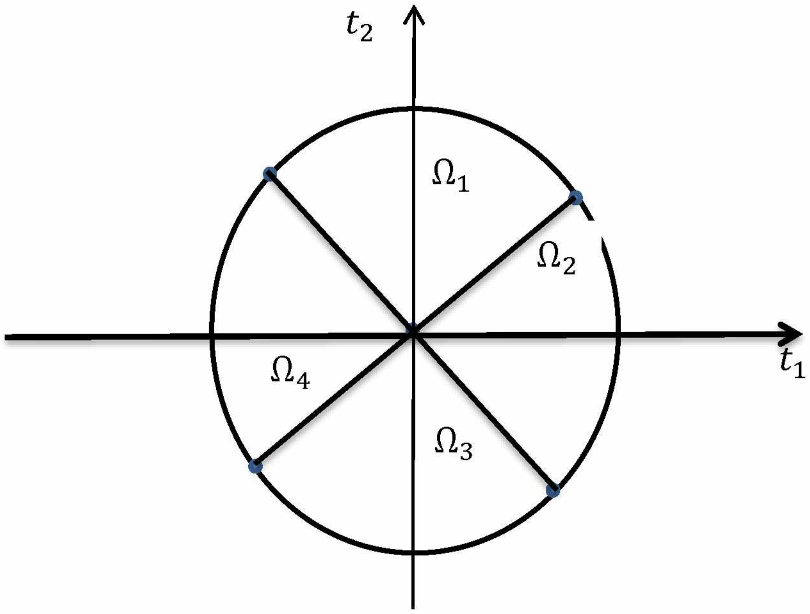

Рисунок 1- Деление круга

Линия уровня (p_{00}) в точке $t = 0$ расветвляется и ветвьями являются радиусы круга. Части круга Ω разделенные линией (p_{00}) обозначим Ω_j $(j = 1,2,3,4)$ (рисунок 1). В каждом из частей Ω_j функция Ret^2 попеременно принимает значения различных знаков:

$$\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \ (Ret^2 \leq 0), \ \forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4 \ (Ret^2 \geq 0)$$

Пусть $t_0 \in \Omega_3$ и $t_0 \in R$ - множество дейтвительных чисел.
Рассмотрим линию уровня $(p_0) = \{t \in C, \ Ret^2 = t_0^2\}$.

Линия уровня (p_0) имеет не пересекающиеся ветви (p_{01}) и (p_{02}). Ветви принадлежат Ω_2, Ω_3. Пусть $(p_{01}) \in \Omega_3, (p_{02}) \in \Omega_2$ (рисунок 2).

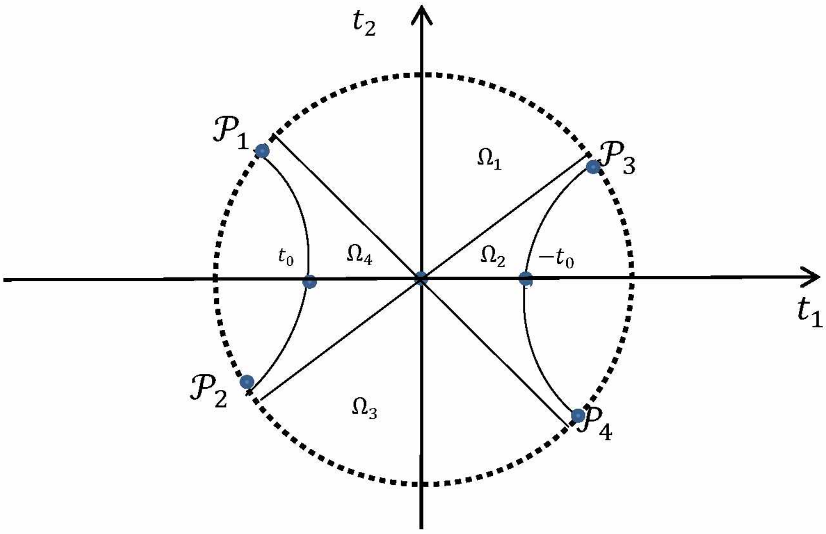

Рисунок 2 - Линия уровня (p_0).

Точки пересечения круга Ω с (p_{01}) обозначим $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, а с (p_{02}) обозначим $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$. $\mathcal{P}_1$ с $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ с $\mathcal{P}_4$ симметричны относительно действительной оси; $\mathcal{P}_1$ с $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2$ с $\mathcal{P}_4$ симметричны относительно мнимой оси.

Область ограниченную отрезками $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_4$ и линиями $(p_{01}), (p_{02})$ обозначим Ω_0 (рисунок 3).

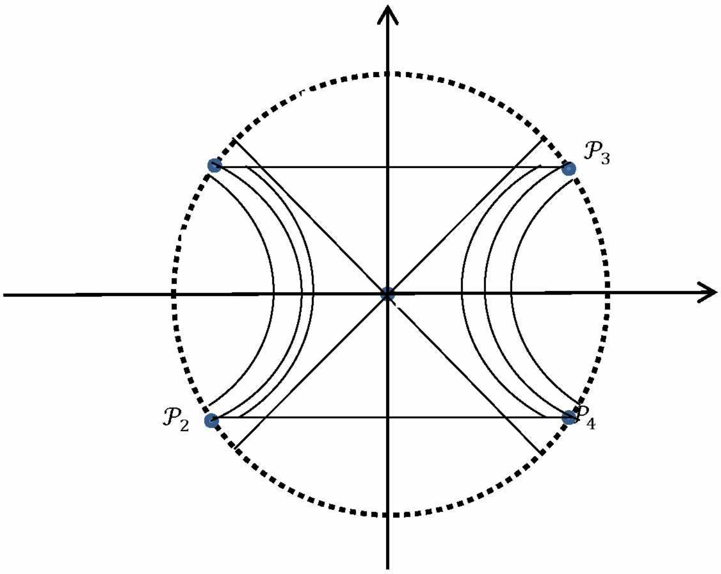

Рисунок 3 - Область Ω_0

Введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_{01}^{-\varepsilon}) = \{t \in C, Re(t^2 - t_0^2) = \varepsilon ln\varepsilon\},$$

$$(p_{01}^{\varepsilon}) = \{t \in C, Re(t^2 - t_0^2) = -\varepsilon ln\varepsilon\},$$

$$(p_{02}^{-\varepsilon}) = \{t \in C, Re(t^2 - t_0^2) = \varepsilon ln\varepsilon\},$$

$$(p_{02}^{\varepsilon}) = \{t \in C, Re(t^2 - t_0^2) = -\varepsilon ln\varepsilon\}. \text{ (рисунок 3)}$$

Далее область ограниченную: дугой $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ и линией (p_{01}^{ε}) обозначим Ω_{01}; линиями (p_{01}^{ε}) и (p_{01}) обозначим $\Omega_{01}^{1\varepsilon}$; линиями (p_{01}) и $(p_{01}^{-\varepsilon})$ обозначим $\Omega_{01}^{2\varepsilon}$; линиями $(p_{01}^{-\varepsilon})$ и $(p_{02}^{-\varepsilon})$

обозначим Ω_{00}; линиями $(p_{02}^{-\varepsilon})$ и (p_{02}) обоначим $\Omega_{02}^{2\varepsilon}$; линиями (p_{02}) и (p_{02}^{ε}) обозначим $\Omega_{02}^{1\varepsilon}$; линией (p_{02}^{ε}) и дугой $\mathcal{P}_3\mathcal{P}_4$ обозначим Ω_{02} (рисунок 4).

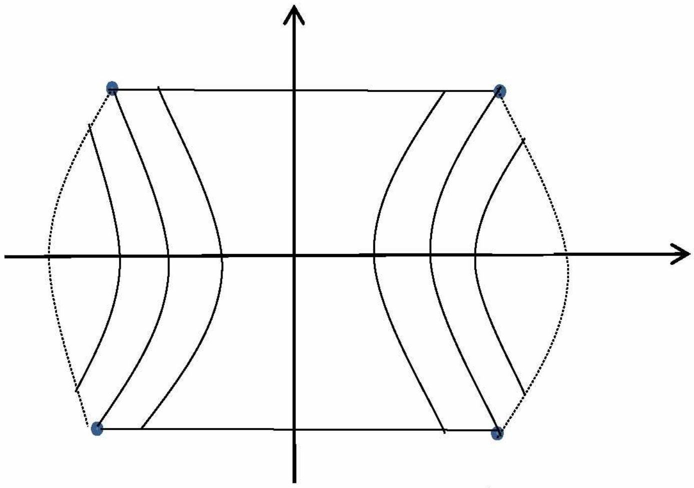

Рисунок 4- Определение различных областей

Далее будем считать, что линии (p_{01}^{ε}), $(p_{01}^{-\varepsilon})$ не пренадлежат области $\Omega_{01}^{\varepsilon}$, а линии (p_{02}^{ε}), $(p_{02}^{-\varepsilon})$ области $\Omega_{02}^{\varepsilon}$.

3. Асимптотическое поведение решений

Функцию (8) будем рассматривать в областях определенных в разделе 2. Для исследования асимптотического поведения функции (8) выберем пути интегрирования. Путь интегрирования для всех областей состоит: из части (p_{01}) соединяющее точки $t_0, \tilde{t} \in (p_0)$, из прямолинейного отрезка соединяющее точки $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$, $t = t_1 + i\tilde{t}_2$.

3.1. Пусть $\forall t \in (p_{01})$. Уравнения (p_{01}) можно записать в виде

$$t_1 = -\sqrt{t_2^2 + t_0^2}.$$

Имеем $exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon} = exp\frac{2it_1t_2}{\varepsilon}$. Заметим (относительно уравнения (p_{01}), что равенство $t_1^2 - t_2^2 + t_0^2 = 0$ выполняется для каждой точки $t \in (p_0)$, но это равенство не является тождеством. Это замечание используется при дифференцировании функции $exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}$ на линии (p_{01}).

Таким образом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} exp\frac{2it_1t_2}{\varepsilon}$ не существует, но $\left|exp\frac{2it_1t_2}{\varepsilon}\right| = 1$.

Теперь рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{\tau^2 - t_0^2}{\varepsilon} d\tau$$

Учитывая выбранный путь интегрирования имеем

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon) = \int_0^{t_2} exp\frac{2i\tau_1\tau_2}{\varepsilon} d\left(-\sqrt{\tau_2^2 + t_0^2} + i\tau_2\right).$$

К этому интегралу применяя интегрирование по частям получим

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Согласно сказанного получим

$$x(t,\varepsilon) \sim O(1)\, exp\frac{2it_1t_2}{\varepsilon}.$$

Полученное соотношение показывает, что $\forall t \in (p_{01})$ предел функции $x(t,\varepsilon)$ по ε не существует.

3.2. $t \in \Omega_{01}^{2\varepsilon}$. Тогда $(\varepsilon ln\varepsilon < t_1^2 - t_2^2 + t_0^2 \leq 0)$. Следовательно функция $exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}$ ограничено по модулю, но не имеет предела по ε. Как только t достигает границы $(p_{01}^{-\varepsilon})$ предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon} = 0$. Это граница принадлежит области Ω_{00}. Нетрудно установить соотношение

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Таким образом при $x(t,\varepsilon) \sim O(1)\, exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}$.

3.3 Пусть $t \in \Omega_{00}$. В данном случае $exp\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon} \to 0$ по ε. Рассмотрим интеграл $\mathcal{J}(t,\varepsilon)$. Имеем

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{\tau^2 - t_0^2}{\varepsilon}d\tau = \int_0^{\tilde{t}_2} exp\frac{2i\tau_1\tau_2 - t_0^2}{\varepsilon} d\left(-\sqrt{\tau_2^2 + t_0^2} + i\tau_2\right) +$$

$$+\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{\tau_1^2 - t_2^2 - t_0^2 + 2i\tau_1 t_2}{\varepsilon}d\tau_1.$$

Тогда первый интеграл имеет порядок $\varepsilon^n, n \in N$, а для второго интеграла имеем

$$\left|\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{\tau_1^2 - t_2^2 - t_0^2 + 2i\tau_1 t_2}{\varepsilon}d\tau_1\right| \leq \int_0^{t_1} exp\frac{\tau_1^2 - t_0^2 - t_2^2}{\varepsilon}d\tau_1 \leq exp\frac{t_1^2 - t_0^2 - t_2^2}{\varepsilon}$$

Поскольку $t_1^2 - t_0^2 \leq \varepsilon ln\varepsilon,$ то $\int_0^{t_1} exp\frac{\tau_1^2-t_0^2-t_2^2}{\varepsilon}d\tau_1 = o(\varepsilon^n), n \in N.$

В итоге получим

$$\forall t \in \Omega_{00}\ (x(t,\varepsilon) \to 0 \text{ по } \varepsilon)$$

3.4. Если $t \in \Omega_{02}^{2\varepsilon} \cup (p_{02})$ то этот случай рассматривается аналагично случаям 3.1, 3.2. В рассматриваемых областьях, как и в случаях 3.1, 3.2, предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon)$ не существует.

При рассмотрении случаев
$t \in \Omega_{01}^{1\varepsilon}$, $t \in \Omega_{02}^{1\varepsilon}$, $t \in \Omega_{01}, t \in \Omega_{02}$ функцию (8) представим в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon x^0 \Big/ \left(\varepsilon \cdot exp\frac{t_0^2 - t^2}{\varepsilon} - x^0 \cdot \int_{t_0}^{t} exp\frac{-t^2+\tau^2}{\varepsilon} d\tau \right). \qquad (9)$$

Случаи $t \in \Omega_{01}^{1\varepsilon}$, $t \in \Omega_{02}^{1\varepsilon}$ рассматриваются аналогично случаю 3.2.

Если $t \in \Omega_{01}$, то $exp\frac{t_0^2-t^2}{\varepsilon} \to 0$ по ε. Рассмотрим $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} exp\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon} d\tau$. Учитывая выбранный путь интегрирования имеем

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon) = \int_0^{\tilde{t}_2} exp\frac{-t^2+t_0^2-2i\tau_1\tau_2}{\varepsilon} d\left(-\sqrt{\tau_2^2+t_0^2}+i\tau_2\right) +$$

$$+ \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{-t_1^2-2it_1t_2+\tau_1^2-2i\tau_1t_2}{\varepsilon} d\tau_1.$$

Имеем :

$$\left|\int_0^{\tilde{t}_2} exp\frac{-t^2+t_0^2-2i\tau_1\tau_2}{\varepsilon} d\left(-\sqrt{\tau_2^2+t_0^2}+i\tau_2\right)\right| \le exp\frac{-t_1^2+t_2^2-t_0^2}{\varepsilon}.$$

Теперь учтем, что

$$\forall t \in \Omega_{01}(-t_1^2+t_2^2-t_0^2 \le \ \varepsilon ln\varepsilon).$$

Тогда в $\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)$ первый интеграл имеет порядок $\varepsilon^n, n \in N$. К второму интегралу применим интегрирование по частьям

$$\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{-t_1^2-2it_1t_2+\tau_1^2-2i\tau_1t_2}{\varepsilon} d\tau_1 = = \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \frac{\varepsilon}{2(\tau_1+it_2)} d\left(exp\frac{-t_1^2-2it_1t_2+\tau_1^2-2i\tau_1t_2}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(t_1+it_2)} - \frac{\varepsilon}{2(\tilde{t}_1+it_2)}\ exp\frac{-t_1^2-2it_1t_2+\tilde{t}_1^2-2i\tilde{t}_1t_2}{\varepsilon} -$$

$$-\varepsilon\int_{\tilde{t}_1}^{t_1}\left(\frac{1}{2(\tau_1+it_2)}\right)'_{\tau_1} exp\frac{-t_1^2-2it_1t_2+\tau_1^2-2i\tau_1t_2}{\varepsilon} d\tau_1.$$

Учтем, что $t_1+it_2=t,\ \ -t_1^2+\tilde{t}_1^2<0$, а последний интеграл имеет порядок ε^2. Таким образом, на оснавании проведенных вычилений получим

$$x(t,\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon x^0}{o(\varepsilon^n) - \frac{\varepsilon}{2t} + o(\varepsilon^2)}.$$

Отсюда

$$\forall t \in \Omega_{01}\ (x(t,\varepsilon) \to -2t \text{ по } \varepsilon\ ).$$

Точно также доказывается

$$\forall t \in \Omega_{02}\ (x(t,\varepsilon) \to -2t \text{ по } \varepsilon\ ).$$

Выводы:

1. В силу проведенных вычислений Ω_{00} − регулярная область, где $x(t,\varepsilon) \to 0$; $\Omega_{01}\Omega_{02}$ −регулярная область, где $x(t,\varepsilon) \to -2t$; линии $(p_{01}), (p_{02})$ −погранслойные линии, а $\Omega_{01}^{1\varepsilon}$, $\Omega_{01}^{2\varepsilon}$, $\Omega_{02}^{1\varepsilon}$, $\Omega_{02}^{2\varepsilon}$ −погранслойные области;

2. Выявлено новый вид погранслойных областей и погранслойных линий. В данном случае погранслойные области и погранслойные линии отличаются от погранслойных областей и погранслойных линий введенных в [1-3]. Если в оказанных работах погранслойные области и погранслойные линии отделяют регулярные и сингулярные области, то в данной работе погранслойные области и погранслойные линии разделяют две области притяжения:

$$\Omega_{00}\ (x(t,\varepsilon) \to 0), \quad (\Omega_{01} \cup \Omega_{02})\ (x(t,\varepsilon) \to -2t);$$

3. В дальнейшем результаты данной работы можно использовать для теории сингулярно возмущенных уравнений в комплекной области. Полученные результаты можно исползовать при исследовании явлений, которые могут находится в различных стационарных состояниях. Обнаруженные новые погранслойные линии и области имеют место для уравнений более общего вида.

Список литературы:

1. **Алыбаев, К.С.** Существование погранслойных линий для линейных сингулярно-возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Матер. II-междун. конфер. “Актуальные проблемы, теории управления, топологии и оперативных уравнений”.- Бишкек. -2013. – С.83-88.
2. **Тампагаров, К.Б.** Классификация погранслойных линий для систем двух сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.Б.Тампагаров // Инновации в науке:сб. статей по материалам LIX Междун. научно-практичес. конфер.- Новосибирск: СиБАК, 2016.- №7(56). - С. 48-53.
3. **Тампагаров, К.Б.** Погранслойные линии для сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими функциями [Текст] / К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII Междун. научно-практич. конф.- Новосибирск: СиБАК, 2016. – С. 67-73.
4. **Alybaev, K.S.** Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018) [Текст] / K.S. Alybaev, A.B. Murzabaeva // AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics. - 2018.P.020076-1-020076-5. Режим доступна http://doi.org/10.1063/1.5049070.
5. **Мурзабаева, А.Б.** Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями при нарушении единственности решений вырожденного уравнения [Текст] / А.Б. Мурзабаева // Иновации в науке: сб. ст. по матер. LXIII междун.науч-практ. конф. №11(60). – Новосибирск: СибАК, 2016.- С.42 - 49.

DOI: 10. 54834 / 16945220_2021_3_40

Поступила в редакцию 15. 11. 2021 г.