УДК 517.928

Халматов А. А.
к.ф-м.н., и.о. доцента Кыргызско-Узбекского Межд. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика
Балтабаев А. А.
магистрант Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Каныбек к. Г.
магистрант Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

СИНГУЛЯРДУУ-КОЗГОЛГОН ӨЗГӨЧӨ ЧЕКИТИ БАР СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫН ТУРГУЗУУ

Бул жумушта изилдөөнүн максаты катары сингулярдуу козголгон сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин, тагыраак айтканда Лайтхиллдын жаңы моделдик теңдемесин чечиминин асимптотикасын тургузуудан турат. Экинчи тартиптеги Лайтхилл түрүндөгү моделдик теңдемени униформизациялоо жолу менен изилденген. Алгачкы маселенин чечими классикалык кичине параметр кийирүү жолу менен эсептелинип, ал берилген аралыкта чектелген чечимге ээ экендиги аныкталды. Берилген аралыкта толо кандуу чечимди аныктоо үчүн мажоранта усулу колдонулду. Параметризациялоо методу аркылуу дифференциал теңдемелер системасы түзүлүп чечимдердин асимптотикасы табылды. Каралган методдордун майнаптуулугу каралып, салыштырмалуу анализ жүргүзүлүп чечимдердин асимптотикасын аныктоонун күчтүү жана алсыз жактары изилденди. Алынган жыйынтыктарга таянган абалда, мажоранталар усулу, параметризациялоо методу жаңы Лайтхиллдын экинчи тартиптеги теңдемесин чечимдердин асимптотикасын аныктоодо эң ыңгайлуу усул экендиги көрсөтүлдүү.

Негизги сөздөр: *сингулярдуу козголгон; өзгөчө чекит; асимптотика; дифференциалдык теңдеме; Лайтхиллдын теңдемеси; мажоранта усулу.*

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМЕЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

В данной работе предметом исследования является построение асимптотики решения сингулярно возмущенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, конкретнее нового модельного уравнения Лайтхилла второго порядка. Ранее модельное уравнение Лайтхилла второго порядка было рассмотрено методом униформизации. Решение задачи представлено методом классического малого параметра, которое имеет ограниченное решение в определенном промежутке. Для определения полноценного решения на всем заданном промежутке использован метод мажорант. Введен метод параметризации, составлена система дифференциальных уравнений с соответствующей постановкой для получения асимптотики решения. Сделан сравнительный анализ двух вышеуказанных методов, отмечены преимущества и недостатки при нахождении асимптотики решения нового модельного уравнения Лайтхилла второго порядка. На основе полученного результата можно сделать выводы, что метод мажорант, метод параметризации является оптимальным для нахождения асимптотики решения на всем заданном промежутке.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенный; особая точка; асимптотика; дифференциальное уравнение; уравнение Лайтхилла; метод мажорант.*

CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED NONLINEAR EQUATION WITH A SINGULAR POINT

In this paper, the subject of research is the construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed nonlinear differential equation of the second order, more specifically, the new model Lighthill's equation of the second order. Earlier, the second-order model Lighthill's equation was considered by the uniformization method. The solution of the problem is presented by the method of the *classical small parameter, which has a limited solution in a certain interval. To determine a full-fledged solution over the entire given interval, the majorant method was used. A method of parametrization is introduced, a system of differential equations with the appropriate formulation for obtaining the asymptotics of the solution is compiled. A comparative analysis of the above two methods is made, the advantages and disadvantages of finding the asymptotics of the solution of the new model Lighthill's equation of the second order are noted. Based on the result obtained, it can be concluded that the majorant method, the parametrization method is optimal for finding the asymptotics of the solution over the entire given interval.*

Key words: *singularly perturbed; turning point; asymptotic; differential equation; Lighthill's equation; method of majorants.*

1. Маселенин коюлушу

Төмөнкү экинчи тартиптеги Лайтхилл түрүндөгү теңдеме өзгөчө козголгон теңдеме үчүн Кочи маселесин карайбыз

$$\left(\varepsilon\frac{dy}{dx}+x\right)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+p(x)\frac{dy(x)}{dx}=r(x). \quad (1)$$

$$y(1)=a, \quad \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1}=b. \quad (2)$$

Мында $p(x), r(x) - C^{(\infty)}[0,1]$, башкача айтканда чексиз туундусу бар жылма функцияларда a, b – туруктуу, чыныгы сандар, $0<\varepsilon<1$ – кичине параметр. (1) теңдеме өзгөчө козголгон теңдеме, себеби $\varepsilon=0$ десек козголбогон теңдеме

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+p(x)\frac{dy(x)}{dx}=r(x). \quad (3)$$

$$y(1)=a, \quad \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1}=b. \quad (4)$$

(3) теңдеме экинчи тартиптеги туундунун алдында x – өзгөрүлмө чоңдугу турат. Бул регулярдуу козголгон өзгөчө чекиттүү дифференциалдык теңдеме. Маселен,

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=0$$

теңдемени карасак. Мунун чечими

$$\frac{du}{dx}=\frac{C_1}{x},$$

$$u(x)=C_2+C_1\ln x$$

Бул чечим $x=0$ чекитинде аныкталган эмес.

(1) – (2) маселенин $[0,1]$ аралыгында жайгашкан чечиминин асимптотикасын тургузуу керек.

1. *Классикалык кичине параметр методу*

Эгерде (1) – (2) маселени классикалык кичине параметр усулу менен чыгарсак, башкача айтканда чечимди

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_0}{dx} + \varepsilon\frac{dy_1}{dx} + \varepsilon^2\frac{dy_2}{dx} + \cdots \tag{6}$$

(5) – (6) теңдемени (1)- ге коюп, андан соң бизден ε – дун даражасынын алдындагы коффициенттерин, барабарлаштырса анда $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ ... функцияларын аныктоо үчүн төмөнкү теңдемелерди алынат:

$$Ly_0(x) = x\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy_0}{dx} = r(x), \qquad y_0(1) = a, \ \left.\frac{dy_0}{dx}\right|_{x=1} = b \tag{7.0}$$

$$Ly_1(x) = -\frac{dy_0}{dx}\frac{d^2y_0}{dx^2}, \qquad y_1(1) = 0, \left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=1} = 0 \tag{7.1}$$

$$Ly_2(x) = -\frac{dy_0}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_0}{dx^2}, \qquad y_2(1) = 0, \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=1} = 0 \tag{7.2}$$

$$Ly_m(x) = -\sum_{\substack{i+j=m-1 \\ i,j\geq 0}}\frac{dy_i}{dx}\frac{d^2y_j}{dx^2} - \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_0}{dx^2}, \ y_m(1) = 0, \left.\frac{dy_m}{dx}\right|_{x=1} = 0, \tag{7,m}$$

$$(m = 1, 2, 3 \ldots)$$

Биринчи (7.0) маселенин чечимин табуу:

$\frac{dy_0}{dx} = u(x)$, десе, анда

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,u(x) = r(x), \ u(1) = b. \tag{8}$$

Мында,

$$p(0) = p_1 = 0 \tag{9}$$

деп алалы, анда (8) дин чечими:

$$u(x) = be^{\left(\int_1^x -\frac{p(s)}{s}ds\right)} + e^{\left(\int_1^x -\frac{p(s)}{s}ds\right)}\int_1^x e^{\left(\int_1^x -\frac{p(s)}{s}ds\right)}\frac{\tau(s)}{s}ds$$

жеңил болушу үчүн,

$$r(x) = 0$$

анда

$$u(x) = be^{\left\{\int_1^x -\frac{p(s)}{s}ds\right\}}$$

Бул функциянын $x \to 0$ умтулгандагы асимптотикасы: $p(0) = p_2 = -2$ деп белгиленет.

$$u(x) = be^{\left\{\int_1^x -\frac{p(s)+2}{s}ds \cdot \int_1^x -\frac{2}{s}ds\right\}},$$

$$u(x) = \mathcal{P}(x) \cdot x^{-2},$$

мында $\mathcal{P}(x) = be^{-1}\exp(\int_1^x \frac{2-p(s)}{s})$ чекитиндеги функция

$$|\mathcal{P}(x)| \le l = const, \ \forall x \in [0,1], \qquad (10)$$

$$y'_0(x) = u(x) \sim \mathcal{P}(0) \cdot x^{-2}, \quad x \to 0\,, \qquad (11)$$

(10) теңдемеден (11) ди кемитүү натыйжасында

$$y_0(x) \sim -\mathcal{P}(0) \cdot x^{-1}, \quad x \to 0\,, \qquad (12)$$

$y_1(x)$ ди аныктаган (7.1) теңдемеси

$$Ly_1(x) \sim -\mathcal{P}(x) \cdot x^{-2} \cdot (-2\mathcal{P}(x) \cdot x^{-3}) = 2\mathcal{P}^2(x) \cdot x^{-5}, \quad x \to 0$$

Мындан

$$y_1(x) \sim -A_1 x^{-4},$$

$$y_1(x) \sim -4A_1 x^{-5}, \quad x \to 0,$$

мында A_1 – белгилүү сан. Эми $y_2(x)$ аныктоочу (7.2) маселе:

$$Ly_2(x) \sim l_2 \cdot x^{-8}, \quad x \to 0,$$

$$l_2 = const$$

Мындан

$$y_2(x) \sim A_2 x^{-7}, \quad x \to 0,$$

$$y'_2(x) \sim -7A_2 x^{-8}, \quad x \to 0,$$

$$y''_2(x) \sim +7 \cdot 8 \cdot A_2 x^{-9}, \quad x \to 0$$

алынат. Ушул жол менен

$$y_m(x) \sim A_m x^{-(3m+1)}, \quad x \to 0,$$

$$y'_m(x) \sim -(3m+1) \cdot A_m x^{-(3m+2)}, \quad x \to 0,$$

$$y''_m(x) \sim -(3m+1)(3m+2) \cdot A_m x^{-(3m+3)}, \quad x \to 0$$

алынат.

Демек, (1)-(2) маселенин асимптотикасы өзгөчө

$$y(x) \sim x^{-1}[-\mathcal{P}(0) + A_1 \varepsilon x^{-3} + A_2(\varepsilon x^{-3})^2 + \cdots + A_m(\varepsilon x^{-3})^m + \cdots] \qquad (13)$$

Мында A_i=const.

(13) тон бул асимптотика $(\sqrt[3]{\varepsilon};\ 1]$ аралыгында гана туура болот. Демек, чечимди $x = 0$ чекитине чейин жеткире алган жокпуз.

1-теорема: Классикалык усул менен тургузулган (5) чечим $[\varepsilon^{\alpha}, 1]$,

$0 < \alpha < \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ аралыгында гана туура болот.

Формалдуу гана далилдөөсү берилди, чыныгы далилдөөсү мажоранта усулу менен далилденет.

2. Параметрлештирүү усулу.

Бардык $[0, 1]$ аралыктагы чечимин алуу үчүн параметрлештирүү усулу колдонулат. Алгач, (1) теңдемени система түрүндө жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = U, \qquad y(1) = a. \tag{14.1}$$

$$(x + \varepsilon U)\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot U + r(x), \qquad U(1) = b. \tag{14.2}$$

(14.2) ни чыгарса $[0, 1]$ аралыгында, анда (14.1) –ден $y(x)$ ти табуу болот. (14.2)-де ξ-деген параметр киргизебиз.

$$\begin{cases} \xi \dfrac{dU}{d\xi} = -p(x)U(\xi) + \tau(x), & U(1) = b \quad (15.1) \\ \xi \dfrac{dx}{d\xi} = x(\xi) + \varepsilon U(\xi), & x(1) = 1 \quad (15.2) \end{cases}$$

Мында $\xi[\xi_0(\varepsilon), 1], \quad \xi_0(\varepsilon) > 0$.

Эгерде

$$x(\xi) + \varepsilon \cdot U(\xi) \neq 0 \tag{16}$$

болсо, анда (15.1) ди (15.2) ге бөлсөк, анда (14.2) ни алынат.

(15) тин чечимин асимптотикасын төмөнкүдөй изделет:

$$\begin{gathered} U(\xi) = U_0(\xi) + \varepsilon U_1(\xi) + \xi^2 U_2(\xi) + \cdots, \ \ U_0(1) = b, \\ U_k(1) = 0\ (k \geq 1) \\ x(\xi) = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots, \quad x_j(1) = 0\ (j = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{17}$$

(17) ни (15) ке коюп $U_k(\xi), x_k(\xi)$ функциялары үчүн төмөнкүдөй теңдемелерди алынат:

$$\begin{cases} \xi \dfrac{dU_0}{d\xi} = -p(\xi) \cdot U_0(\xi) + \tau(\xi), & U_0(1) = b \qquad (18.1) \\ \xi \dfrac{dx_1}{d\xi} = x_1(\xi) + U_0(\xi), & x_1(1) = 0 \qquad (18.2) \end{cases}$$

$$\xi\frac{dU_1}{d\xi} = -p(\xi)\cdot U_1(\xi) + p'^{(\xi)}\cdot U_0(\xi) + \tau'(\xi)x,\ U_1(1) = 0 \qquad (19.1)$$

$$\xi\frac{dx_2}{d\xi} = x_2(\xi) + U_1(\xi),\ \ x_1(1) = 0 \qquad (19.2)$$

Биз $p(0) = 2$, деп алганда $x_0(\xi)\sim -\mathcal{P}(0)\xi^{-1}$ болгон, эми (18.2) ни

$$\xi\frac{dx_1}{d\xi} = x_1(\xi) + \mathcal{P}(0)\xi^{-1}, \qquad x_1(1) = 0$$

деп жазылат.

(18.1) ден

$$U_0(\xi) = b\xi^{-2},$$

$$x_1(\xi) = b\xi\int_0^{\xi} s^{-3}ds \,\square\, \frac{-b}{2}\xi^{-1}$$

Эми

$$\dot{x}(\xi) + \varepsilon U(\xi) \,\square\, \xi + \frac{\varepsilon b}{2}\xi^{-2} + \varepsilon b\xi^{-2},\ \xi \to 0$$

$$\xi + \frac{\varepsilon b}{2}\xi^{-2} = 0 \qquad (20)$$

Эгерде $b > 0$ болсо, анда (20) теңдеменин чечими болбойт. Демек, (14) менен (1) теңдемене эквиваленттүү. x=0 чекитинде

$$x = \eta - \frac{\varepsilon b}{2}\eta^{-2} \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon b}{2}} > 0$$

чекити туура келет.

Демек,

$$U(\eta) \,\square\, y(0) = \frac{b}{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon b}{2}}}$$

Жыйынтыктар:

1. Жаңы Лайтхиллдын экинчи тартиптеги моделдик теңдемеси үчүн классикалык кичине параметр кийирүү берилген аралыкта чектелген чечимге ээ экендиги аныкталды;

2. Жаңы моделдик Лайтхилл түрүндөгү маселенин асимптотикасы мажоранта усулу менен тургузулду.

Колдонулган адабияттар:

1. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Текст] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. – Moscow, 2012. – P. 117–121.
2. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular erturbed differential equation of the type of Lighthill [Текст] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) - Volume 3.-

Issue X, 2015. – Pp.54-64.
3. **Alymkulov, K.** Perturbed differential equation with singular points and some bifurcations problems [Текст] / K. Alymkulov.- B.: Ilim, 1992. – 108 p.
4. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда решение невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке [Текст] / А.А. Халматов // Известия Ошского технологического университета.- Ош: ТУ, 2018.-
5. С. 177-180.
6. **Халматов, А.А.** Обобщенный метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка [Текст] / А.А.Халматов // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. - №3 (66).- С. 23-27.
7. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Труды междун. науч. конфер. посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского универ. – Вып. 4. – Ош, 2014. – С. 119-121.
8. **Tursunov, D.A.** Asymptotics of the solution to the boundary-value problems with non smooth coefficient. [Text] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, A.A. Halmatov // Lobacevskii Journal of Mathmatics. - 2020. - T.41.- №6. – Pp.1115-1122.

DOI: 10. 54834 / 16945220_2021_3_34

Поступила в редакция 12. 09. 2021 г.

УДК 517.928

Алыбаев К. С.
д. ф-м.н., проф. Джалал-Абадского госуд. универ. им. Б. Осмонова, Кыргызская Республика
Матанов Ш. М.
преп. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

АШУУ ЧЕКИТИНЕ ЭЭ БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН БЕРНУЛЛИНИН ТЕҢДЕМЕСИНИН ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТЕОРИЯСЫ

Бул макалада ашуу чекитине ээ болгон сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме каралды. Алгачкы эмгектерди колдонуу менен чек-аралык катмар сызыктарынын, чек-аралык катмар аймактарынын жана тартылуу аймактарынын аныктамалары берилген. Кабыл алынган аныктамаларга ылайык тартылуу аймактарын, чек аралык катмар аймактарын жана сызыктарын, регулярдуу жана сингулярдуу аймактарды изилдөө жана олуттуу айырмачылыктарды белгилөө милдети коюлду. Конформдык өзгөртүп түзүүнү колдонуу менен маселе стандарттуу түргө келтирилди, гармониялык функциялардын деңгээл сызыктарын колдонуу менен аймактардын геометриялык сүрөттөлүштөрү жүргүзүлдү. Бардык өзгөртүп түзүүлөр тиешелүү сүрөттөр менен коштолду. Келечекте бул иштин натыйжалары комплекстик областагы сингулярдык козголгон теңдемелердин теориясын өнүктүрүүдө колдонсо болот. Алынган натыйжалар ар кандай стационардык абалда боло турган кубулуштарды изилдөө үчүн колдонулушу мүмкүн. Ачылган жаңы чек аралык катмар сызыктары жана аймактары жалпы түрдөгү теңдемелерде орун алат.

Негизги сөздөр: *сингулярдык козголуу; чек аралык катмар сызыгы; чек аралык катмар аймагы; тартылуу аймагы; деңгээл сызыктары.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ С ТОЧКОЙ ПЕРЕВАЛА

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенное уравнение с точкой перевала. Приведены определения погранслойных линий, погранслойных областей, областей притяжения из