ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.928

Халматов А. А.
к.ф-м. н., и.о. доцента Кыргызско-Узбекского Междун. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика
Нишанбаева Н.
магистрант Ошского государственного университета, Кыргызская Республика
Абсатар к. А.
магистрант Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ӨЗГӨЧӨ ИЙРИСИ БАР АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ТЕҢДЕМЕНИН АСИМПТОТИКАСЫН ТУРГУЗУУ

Бул жумушта изилдөөнүн максаты катары сингулярдуу козголгон жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин, тагыраак айтканда Кэррердин моделдик теңдемесин чечиминин асимптотикасын тургузуудан турат. Кэррердин моделдик теңдемесин өзгөчө ийриге ээ экендигин жана тик бурчтуу областда каралып жатканын белгилеп өтүү зарыл. Колдонмо математика, гидродинамика жана физиканын айрым маселелердин так чечимдерин аныктоо кыйынчылык жаратат, ага себеп болуп анын татаал чекара шарттары, сызыктуу эместигин айтса болот. Чечимдин асимптотикасын тургузууда классикалык асимптотикалык усул – козголуулар усулунан пайдаланылды. Анын жардамында сызыктуу жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин чечимин тургузуу салыштырмалуу оңой. Бул усулдун эффективдүүлүгү каралып жаткан аралыктын локализациялоо менен жетишилет: чекебел кичирейген сары чечим тагыраак болот. Классикалык усул тик бурчтуу областтарда каралган маселелерге жакшы колдонулат.

Негизги сөздөр: *сингулярдуу козголгон; өзгөчө сызык; асимптотика; дифференциалдык теңдеме; Кэррердин теңдемеси; козголуу методу; сызыктуу эмес; чекара шарттары; локализация.*

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОСОБОЙ ЛИНИЕЙ

Данная статья посвящена построению асимптотики решения сингулярно возмущенного уравнения в частных производных – уравнению Кэррера. Следует отметить, что рассматриваемое уравнение Кэррера имеет особую линию и рассматривается в квадратной области. Нельзя определить точное решение большинства задач прикладной математики, гидродинамики, физики обусловленных сложными граничными условиями и нелинейностью. Для построения асимптотики был использован классический асимптотический метод – метод возмущений. На основе данного метода сравнительно легко можно определить приближенные решения как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений, зачастую и уравнений в частных производных. Эффективность использования данного метода достигается локализацией рассматриваемого промежутка, т.е. результат будет более точнее чем меньше окрестность. Классический метод очень хорошо применим для задач рассматриваемых в прямоугольных областях.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенный; особая кривая; асимптотика; дифференциальное уравнение; уравнение Кэррера; метод возмущений; нелинейность; граничные условия; локализация.*

CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH A SPECIAL LINE

This article is devoted to the construction of asymptotic of the solution a singularly perturbed equation in private derivatives - of the Carrer's equation. It should be noted that the the Carrer's equation *under consideration has a special line and is considered in the rectangular region. It is impossible to determine the exact solution of the majority of tasks of applied mathematics, hydrodynamics, physics due to complex boundary conditions and nonlinearity. To construct asymptotic, a classic asymptotic method was used - the perturbation method. Based on this method, the approximate solutions of both linear and nonlinear differential equations, and equations in private derivatives can be relatively easily. The efficiency of using this method is achieved by the localization of the interval under consideration, i.e. the result will be more accurate than the surrounding area. The classic method is very well applicable for tasks considered in rectangular areas.*

Keywords: *singularly perturbed; special line; asymptotic; differential equation; Carer equation; perturbation method; nonlinearity; boundary conditions; localization.*

1. Маселенин коюлушу

Төмөнкү Кэрьердин теңдемесин

$$\frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial x}+\frac{\vartheta(x,y)}{x}+\vartheta(x,y)\frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial y}=0 \quad (1)$$

$$\vartheta(x,y)\big|_{x=1}=\varepsilon f(y) \quad (2)$$

(1) - (2) - маселесинин чечиминин

асимптотикасын квадраттык областта $t\in[0,1], x\in[0,1]$ тургузулат.

2. Классикалык асимптотикалык метод

Ал төмөнкү

$$\vartheta(x,y)=\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots \quad (3)$$

түрдө изделет , мында $\vartheta^{(\kappa)}(x,y),(\kappa=0,1,2,3,....)$ азырынча белгисиз функциялар

(3)- барабардыкты (1)-(2)- барабардыкка коюп төмөнкүлөр алынат

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,y)=\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots+\frac{1}{x}\left(\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots\right)+\\&+\left(\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots\right)\left(\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots\right)=\\&=\left(\vartheta^{(0)}(x,y)+\varepsilon\vartheta^{(1)}(x,y)+\varepsilon^2\vartheta^{(2)}(x,y)+\ldots\right)\Big|_{x=1}=\varepsilon f(y)\end{aligned}$$

Мындан ε дин бирдей даражаларынын алдындагы коэффиценттеринин барабарлап

$$\vartheta^{(0)}(x,y)+\frac{1}{x}\vartheta^{(0)}(x,y)+\vartheta^{(0)}(x,y)\vartheta_y^{(0)}(x,y)=0, \quad (4,0)$$

$$\vartheta^{(0)}(x,y)\big|_{x=1}=0$$

$$\vartheta^{(1)}(x,y)+\frac{1}{x}\vartheta^{(1)}(x,y)+\vartheta^{(0)}(x,y)\vartheta_y{}^{(1)}(x,y)+\vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y{}^{(0)}(x,y)=0,$$

(4,1)

$$\vartheta^{(1)}(x,y)\Big|_{x=1}=f(y).$$

$$\vartheta^{(2)}(x,y)+\frac{1}{x}\vartheta^{(2)}(x,y)+\vartheta^{(0)}(x,y)\vartheta_y{}^{(2)}(x,y)+\vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y{}^{(1)}(x,y)+\vartheta^{(2)}(x,y)\vartheta_y{}^{(0)}(x,y)=0,$$

$$\vartheta^{(2)}(x,y)\Big|_{x=1}=0\ . \qquad (4,2)$$

$$\vartheta_x{}^{(m)}(x,y)+\frac{1}{x}\vartheta^{(m)}(x,y)+\sum_{i+j=m}\vartheta^{(i)}(x,y)\vartheta_y{}^{(j)}(x,y)=0, \qquad (4.m)$$

$$\vartheta^{(m)}(x,y)\Big|_{x=1}=0.$$

(4,0) теңдемесинин чечими

$$\vartheta^{(0)}(x,y)=0. \qquad (5.0)$$

Анда (4,1) теңдемесинен

$$\frac{\partial\vartheta^{(1)}(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{x}\vartheta^{(1)}(x,y)=0,$$

$$\vartheta^{(1)}(x,y)\Big|_{x=1}=a(y).$$

Төмөнкү алынат

$$\vartheta^{(1)}(x,y)=\frac{a(y)}{x}, \qquad (5.1)$$

анда (4.2) теңдемеси

$$\frac{\partial\vartheta^{(2)}(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{x}\vartheta^{(2)}(x,y)+\vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y{}^{1}(x,y)=0.$$

же төмөнкү түр

$$\mathrm{L}\,\vartheta^{(2)}=\frac{\partial\vartheta^{(2)}(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{x}\vartheta^{(2)}(x,y)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}\,\vartheta^{(1)}(x,y)}{\mathrm{d}y},$$

$$\vartheta^{(2)}(x,y)\Big|_{x=1}=0.$$

Бул маселенин чечими

$$\vartheta^{(2)}(x,y) = -x^{-1}\int_1^x \frac{1}{s}ds \cdot \frac{da(y)}{dy} = -\frac{da(y)}{dy}x^{-1}\ln x, \tag{5.2}$$

$\vartheta^{(3)}(x,y)$ түн аныктоочу теңдемеси төмөнкүдөй көрүнуштө болот

чечимин (x_0 ,1] аралыгында аныктадык.

$$\mathrm{L}\,\vartheta^{(3)}(x,y) = -\vartheta^{(0)}(x,y)\vartheta_y^{(3)}(x,y) + \vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y^{(2)}(x,y) + \vartheta^{(2)}(x,y)\vartheta_y^{(1)}(x,y) + \vartheta^{(3)}(x,y)\vartheta_y^{(0)}(x,y) =$$

$$= -\vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y^{(2)}(x,y) - \vartheta^{(2)}(x,y)\vartheta_y^{(1)}(x,y) - \frac{a(y)}{x^2}a'(y)Lnx + a'(y)x^{-1}Lnx\frac{a(y)}{x} =$$

$$= 2\frac{a(y)a'(y)}{x^2}Lnx.$$

Мындан

$$\vartheta^{(3)}(y) = 2a(y)a'(y)x^{-1}\int_1^x \frac{lns}{s}ds;$$

$$\vartheta^{(3)}(x,y) = 2a(y)a'(y)x^{-1}Ln^2x. \tag{5.3}$$

$\vartheta^{(4)}(x,y)$ түн аныктоочу теңдемеси төмөнкүдөй көрүнуштө болот

$$\mathrm{L}\,\vartheta^{(4)}(x,y) = -\vartheta^{(1)}(x,y)\vartheta_y^{(3)}(x,y) - \vartheta^{(2)}(x,y)\vartheta_y^{(2)}(x,y) - \vartheta^{(3)}(x,y)\vartheta_y^{(1)}(x,y) =$$

$$= -\frac{a(y)2\big(a(y)a'(y)\big)'}{x^2}Ln^2x - \frac{a'(y)a''(y)}{x^2}Ln^2x - 2a^2(y)a'(y)\frac{1}{x^2}Ln^2x,$$

$$\mathrm{L}\,\vartheta^{(4)}(x,y) = \frac{A_4(y)}{x^2}Ln^2x.$$

Мында $A_4(y)$ - белгилүү функция, мындан

$$\vartheta^{(4)}(y) = \frac{1}{3}\frac{A_4(y)}{x^2}Ln^3x \tag{5.4}$$

Математикалык индукция методунун негизинде

$$\vartheta^{(m)}(y) = A_m(y)\frac{Ln^{m-1}x}{x}, (m = 1,2,3...) \tag{5.m}$$

Демек (3)- теңдеменин чечими

$$\begin{aligned}\vartheta(x,y) &= \frac{\varepsilon}{x}A_1(y)+\varepsilon^2 A_2(y)\frac{Lnx}{x}+\varepsilon^3 A_3(y)\frac{Ln^2x}{x}+...+A_m(y)\varepsilon^m\frac{Ln^{m-1}x}{x}+...= \\ &=\frac{\varepsilon}{x}\left[A_1(y)+A_2(y)\varepsilon Lnx+A_3(y)(\varepsilon Lnx)^2+...+(\varepsilon Lnx)^{m-1}A_m(y)+...\right]\end{aligned} \quad (6)$$

Бул катар $\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}},1\right]$ аралыгында асимптотикалык катар болот, себеби $\varepsilon ln\frac{1}{x_0}=1$ чектүү же $x_0=e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ чекити (6)-катардын өзгөчө чекити болот. Демек, биз (1)- (2) теңдемесинин чечимин (x_0,1] аралыгында аныктадык.

Жыйынтыктар:

1. Изилдөөнүн жыйынтыгында жаңы Кэррердин моделдик теңдемесинин маселесисинин асимптотикасы тургузулду;
2. Кэррердин моделдик теңдемесинин маселесисинин асимптотикасы тургузууда өзгөчө чекит пайда болушу көрсөтүлдү.

Колдонулган адабияттар:

1. **Tursunov, D.A.** Asymptotics of the solution to the boundary-value problems with non smooth coefficient [Text] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, A.A. Halmatov // Lobacevskii Journal of Mathmatics. - 2020. - T.41.- №6. – P.1115-1122.
2. **Халматов, А.А.** Обобщенный метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка [Текст] / А.А. Халматов // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. - №3 (66).- С. 23-27.
3. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда решение невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке [Текст] / А.А. Халматов // Известия Ошского технологического университета.- Ош: ОшТУ, 2018. - № 1. – С.177-180.
4. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR*) - Volume 3.- Issue X, 2015. – P.54-64.
5. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Труды Междун.науч. конф. посвященной 20-летию образов. Кыргызско-Узбекского универ. – Ош, 2014. – С. 119-121.
6. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. – Moscow, 2012. – P. 117–121.
7. **Alymkulov, K.** Perturbed differential equation with singular points and some bifurcations problems [Text] / K. Alymkulov.- Bishkek: Ilim, 1992. – 108p.

DOI: 10. 54834 / 16945220_2021_3_28

Поступила в редакцию 12. 09. 2021 г.