УДК 517.956

*Пирматов А.З.*
*преп. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика*

# ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

*Изилдөөнүн предмети болуп жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелер үчүн так чек аралык маселелер саналат. Изилдөөнүн максаты – жекече туундулуу төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдемелер үчүн чек аралык маселелерди үйрөнүү. Изилдөөдө энергиянын интегралдар методу колдонулуп, анын жардамында маселенин чечиминин жалгыздыгы далилденди. Төртүнчү тартиптеги коэффициенти өзгөрмө болгон гиперболикалык теңдеме үчүн биринчи чек аралык маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденди. Илимий жана практикалык баалуулугу: теңдеменин тартибин төмөндөтүү жолу менен маселе экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн чек аралык маселеге келтирилди. Гриндин функциясы методу менен маселенин чечиминин көрүнүшү алынды. Мисал катары $c(x)$ коэффициенти нөлгө барабар жана терс болгон учурларда маселенин чечимдери табылган. Ошондой эле, $c(x)$ коэффициентинин кээ бир маанилеринде, маселенин чечиминин жалгыздыгынын бузулгандыгы көрсөтүлгөн. Алынган жыйынтыктарды математикалык адистиктерде окуган студенттерди окутууда да колдонууга болот.*

***Негизги сөздөр:*** *чек аралык маселелер; жашашы; жалгыздыгы; Гриндин функциясы; гиперболикалык теңдеме.*

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*Предметом исследования является корректные краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка. Цель данной работы является изучение корректных краевых задач для гиперболического уравнения четвертого порядка в частных производных. В исследовании использованы методы интегралов энергии, с помощью которых доказана единственность решения задачи. Доказана существование и единственность решения первой краевой задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с переменным коэффициентом. Научная и практическая ценность: путем понижения порядка уравнения задача сведена к краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка. Получена представление решения задачи через функции Грина. Приведены примеры в случае, когда коэффициент $c(x)$ равна нулю и отрицательное. Показано, что при каких значениях коэффициента $c(x)$, нарушается единственность решения задачи. Полученные результаты можно применять в обучении студентов математических специальностей.*

***Ключевые слова:*** *краевые задачи; существование; единственность; функция Грина; гиперболическое уравнение.*

# BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER HYPERBOLIC EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES

*The subject of the study is well-posed boundary valye problems for high-order differential equations. The purpose of this paper is to study weii-posed boundary value problems for a fourth-order hyperbolic partial differential equation. The studyuses the methods of integrals, which helping the uniqueness of the solution of the problem is proved. The existence and uniqueness of the solution of the first boundary value problem for a fourth-order hyperbolic equation with a variable coefficient is proved Scientific and practical value: By lowering the order of the equation, the problem is reduced a boundary value problem for a second-order differential equation. A representation of the solution of the problem in terms of Green's functions is obtained Examples are given in the case when the coefficient is zero and negative. It is shown* *that at what values of the coefficient, the uniqueness of the solution of the problem is violated. The results obtained can be used in teaching students of mathematical specialties.*

***Key words:*** *boundary value problems; existence; uniqueness; Green's function; hyperbolic equation.*

**1. Постановка задачи.** В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,-h_1<y<0\}$ $(\ell,h_1>0)$ рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+c(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),\qquad(1)$$

где $c(x),f(x,y)-$ заданные функции.

Уравнение (1) имеет две различные двукратные действительные корни [1]

$$x=c_1, y=c_2,$$

где $c_1,c_2-$ произвольные постоянные числа.

Следовательно, граница прямоугольной области $D$ является 2-х кратными действительными характеристиками.

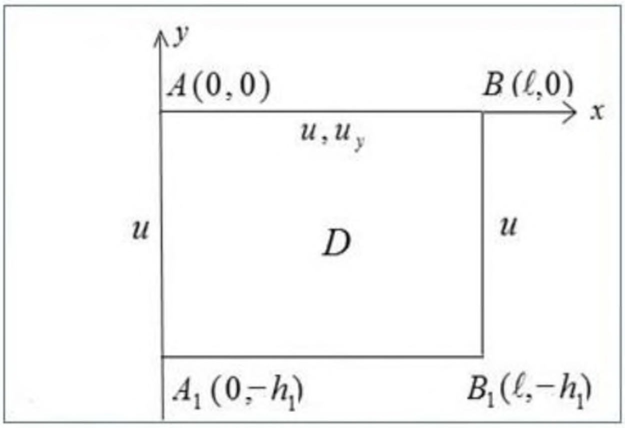


Рисунок 1. Область $D$

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающая следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^{2+2}(D)$,
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1),
3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым и начальным условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y), u(\ell,y)=\varphi_2(y), -h_1\le y\le 0,\qquad(2)$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ 0\le x\le \ell;\qquad(3)$$

4) выполняется условия согласования

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\tau(\ell)=\varphi_2(0),\nu(0)=\varphi_1'(0),\nu(\ell)=\varphi_2'(0);\qquad(4)$$

5) заданные функции удовлетворяют следующим условиям

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C^2[-h_1,0],\ \tau(x)\in C^2[0,\ell],\nu(x)\in C^2[0,\ell].\qquad(5)$$

Уравнение (1), согласно классификации работы [1], является уравнением гиперболического типа с кратными характеристиками. Отметим, что постановка задачи не отличается от постановки первой краевой задачи для уравнения колебания струны. Поэтому задачу 1 назовём первой краевой задачей для уравнения (1).

Введем обозначение

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\upsilon(x,y),(x,y)\in D.\qquad(6)$$

Тогда из уравнения (1), придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + c(x)\upsilon = f(x,y). \tag{7}$$

Для $\upsilon(x,y)$ получаем следующие краевые условия:

$$\upsilon(0,y) = \varphi_1''(y), \upsilon(\ell,y) = \varphi_2''(y), -h_1 \le y \le 0 \tag{8}$$

Таким образом, для новой неизвестной функции $\upsilon(x,y)$ получаем первую краевую задачу.

Если введем обозначение

$$\upsilon(x,y) = \varphi_1''(y) + \frac{x-\ell}{\ell}\left[\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)\right] + w(x,y), \tag{9}$$

где $w(x,y)$ - новая неизвестная функция.

Тогда из уравнений (7) имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(x)w = f_1(x,y), \tag{10}$$

где

$$f_1(x,y) = f(x,y) - c(x)\left\{\varphi_1''(y) + \frac{x-\ell}{\ell}\left[\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)\right]\right\}.$$

Краевые условия (8) примут вид:

$$w(0,y) = 0, w(\ell,y) = 0, -h_1 \le y \le 0. \tag{11}$$

Таким образом, для нахождения функции $w(x,y)$ мы пришли к первой краевой задаче (10), (11).

**2. Теорема единственности.** Рассмотрим однородную краевую задачу для уравнения

$$L(y) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(x)w = 0, (x,y) \in D_1$$

с условиям (11).

Умножая уравнение (12) на $w(x,y)$ имеем

$$wL(w) \equiv [ww_x]_x - w_x^2 + c(x)w^2 = 0.$$

Интегрируя это равенство по $x$ от 0 до $\ell$ получим

$$\begin{gathered}\int_0^\ell w(x,y)L(x,y) \equiv \int_0^\ell [w(x,y)w_x(x,y)]_x + \int_0^\ell [-w_x^2(x,y) + \\ +c(x)w^2(x,y)]dx \equiv 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда, учитывая краевые условия (11) из тождества (13) имеем

$$\int_0^\ell [-w_x^2 + c(x)w^2(x,y)]dx \equiv 0. \tag{14}$$

Пусть выполняется условие

$$\forall x \in [0,\ell] : c(x) \le 0 \tag{15}$$

Тогда из (14) имеем, что

$$\forall x \in [0,\ell]: w_x(x,y) = 0$$

или

$$\forall x \in [0,\ell]: w(x,y) = B(y), \tag{16}$$

где $B(y)$ - произвольная функция.

Так как, $\forall y \in [-h_1, 0]$ выполняется условия (11), то из (16) заключаем, что $B(y) \equiv 0$. Следовательно

$$\forall x \in \bar{D}: w(x,y) \equiv 0.$$

Таким образом, имеет место теорема

**Теорема.** Если выполняется условия (15), тогда задача (12), (11) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (10) имеет единственное решение.

**3. Существование решения.** Исходя из теоремы единственности заключаем, что единственное решение задачи (10), (11) представимо в виде

$$w(x,y) = \int_0^\ell G(x,\xi) f_1(x,y) d\xi, \tag{17}$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, удовлетворяющая следующим условиям [2,3]

1) $G(x,\xi)$ определена и непрерывна в квадрате

$$\{(x,\xi): 0 \le x \le \ell, 0 \le \xi \le \ell\};$$

2) В каждом из интервалов $0 < x < \ell, \xi < x < \ell$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от $x$, является решением уравнения

$$G_{xx}(x,\xi) + c(x)G(x,\xi) = 0$$

3) Производная $G_x(x,\xi)$ терпит разрыв первого рода при $x = \xi$, причем

$$G_x(\xi+0,\xi) - G_x(\xi-0,\xi) = 1;$$

4) $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$G(0,\xi) = 0, G(\ell,\xi) = 0. \tag{18}$$

Подставляя (17) в (9) имеем

$$\upsilon(x,y) = \upsilon_0(x,y) + \int_0^\ell G(x,\xi) f(\xi,y) d\xi, \tag{19}$$

где

$$\upsilon_0(x,y) = \varphi_1''(y) + \frac{x-\ell}{\ell}\left[\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)\right] -$$

$$-\int_0^\ell G(x,\xi) c_1(\xi) \left\{\varphi_1''(y) + \frac{\xi-\ell}{\ell}\left[\varphi_2''(y) - \varphi_1''(y)\right]\right\} d\xi.$$

Интегрируя дважды по $y$ в пределах от 0 до $y$ равенство (6) и учитывая начальные условия (3) имеем

$$u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+\int_0^y (y-\eta)\upsilon(x,\eta)d\eta. \tag{20}$$

Тогда, с учетом (18), из (19) получим представление решение задачи 1 в виде

$$u(x,y)=\tau(x)+y\nu(x)+\int_0^y (y-\eta)v_0(x,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^\ell d\xi\int_0^y (y-\eta)G(x,\xi)f(\xi,\eta)d\eta. \tag{21}$$

**4. Пример 1.** Пусть $c(x)\equiv 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=f(x,y). \tag{22}$$

Решение задачи 1 для уравнения (22) с однородными начальными и граничными условиями имеет вид

$$u(x,y)=\int_0^\ell d\xi\int_0^y (y-\eta)G_1(x,\xi)f(\xi,\eta)d\eta,$$

где

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x(\xi-\ell)}{\ell}, 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{\xi(x-\ell)}{\ell}, \xi\le x\le\ell.\end{cases}$$

**Пример 2.** Пусть $c(x)=-\lambda^2$, где $\lambda=const>0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y). \tag{23}$$

Тогда, согласно формулу (17), для получения представления решения будем строить функцию Грина, удовлетворяющая следующим условиям:

$$G_{xx}(x,\xi)-\lambda^2 G(x,\xi)=0, 0<x<\xi, \xi<x<\ell; \tag{24}$$

$$G(0,\xi)=0, G(\ell,\xi)=0; \tag{25}$$

$$G(\xi+0,\xi)-G(\xi-0,\xi)=0, \tag{26}$$

$$G_x(\xi+0,\xi)-G_x(\xi-0,\xi)=1. \tag{27}$$

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условиям (25), можно представить в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} A_1 sh\lambda x, 0\le x\le \xi, \\ A_2 sh\lambda(x-\ell), \xi\le x\le \ell, \end{cases} \quad (28)$$

где $A_1, A_2$ - произвольные константы.

Используя условия (26) и (27), из (28) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1 sh\lambda\xi - A_2 sh\lambda(\xi-\ell)=0, \\ -A_1\lambda ch\lambda\xi + A_2\lambda ch\lambda(\xi-\ell)=1. \end{cases} \quad (29)$$

Нетрудно заметить, что определитель системы (29)

$$\Delta=\lambda sh\lambda\ell\ne 0.$$

Тогда из (29) определим

$$A_1=\frac{sh\lambda(\xi-\ell)}{\lambda sh\lambda\ell}, A_2=\frac{sh\lambda\xi}{\lambda sh\lambda\ell}.$$

Следовательно, из (28) имеем функцию Грина:

$$G(x,y)=\begin{cases} \dfrac{sh\lambda x\cdot sh\lambda(\xi-\ell)}{\lambda sh\lambda\ell}, 0\le x\le \xi, \\ \dfrac{sh\lambda\xi\cdot sh\lambda(x-\ell)}{\lambda sh\lambda\ell}, \xi\le x\le \ell, \end{cases}$$

и решение задачи 1 представимо в виде (21).

Отметим, что при нарушении условия (150, задача 1 могут иметь бесконечное множество решений.

**Пример 3.** Пусть $c(x)=\left(\dfrac{\pi n}{\ell}\right)^2, n=\pm1,\pm2,....$

Тогда однородная задача 1 имеет бесконечно много ненулевых решений вида:

$$u_n(x,y)=\sin\frac{\pi n}{\ell}x\int_0^y (y-\eta)A(\eta)d\eta, n=\pm1,\pm2,...,$$

где $A(y)$ - произвольная функция.

Задача 1 в качестве примера в случае, когда $c(x)\equiv c=const$ рассмотрена в работе [4].

## Вывод

Путем понижения порядка уравнения задача сведена к краевой задаче для дифференциального уравнения 2-го порядка. Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Получена представление решения задачи через функции

Грина. Приведены примеры в случае, когда $c(x)\equiv 0$, $c(x)=-\lambda^2$. Показано, что при $c(x)=\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, n=\pm1,\pm2,...$ нарушается единственность решения задачи.

## Список литературы:


1. **Джураев, Т.Д.** К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А. Сопуев.-Ташкент: Фан, 2000. - 144 с.
2. **Краснов, М.А.** Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями [Текст] / М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М: КомКнига, 2007. – 192 с.
3. **Наймарк, М.А.** Линейное дифференциальные операторы [Текст] / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. - 528 с.
4. **Пирматов, А.З.** Краевые задачи для смешанных псевдо-параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.З. Пирматов.- Б.: Институт Мат. НАН КР, 2003. - 128 с.
5. **Жээнтаева, Ж.К.** Математика в интеграции знаний студентов [Текст] / Ж.К. Жээнтаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №2. – С. 116– 121.
6. **Жээнтаева, Ж.К.** Условия для существования специальных решений уравнений с запаздывающим аргементом [Текст] / Ж.К.Жээнтаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2018. – №1. – С. 41– 47.
7. **Жээнтаева, Ж.К.** Методика экспериментального исследования асимптотики решений уравнений с запаздывающим аргументом [Текст] / Ж.К. Жээнтаева // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2017. – №2. – С. 26– 29.


DOI:10.54834/16945220_2021_1_66

Поступила в редакцию 22. 01. 2022 г.