7. **Матиева, Г.** Об одном дифференцируемом отображении евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева, Г.М. Борбоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Б.: Илим, 2000.- №29. – С. 430 - 437.
8. **Папиева, Т.М.** Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Б.: Илим, 2009. – С. 294-298.
9. **Папиева, Т.М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.– Б.: Илим, 2010. – С. 199-203.
10. **Фиников, С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников.- М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
11. **Базылев, В.Т.** Многомерные сети двойных линий [Текст] / В.Т. Базылев // В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1975. - №6. – С. 19 - 25.
12. **Абдуллаева, Ч.Х.** E_6 евклиддик мейкиндигинде $\left(f_1^5, \Delta_4\right)$ түгөйүнүн квази-кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [Текст] / [Ч.Х. Абдуллаева, М.Х.Абдулазизова, Б.Т.Адиева и др.] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - №2. - С. 13- 20.

DOI:10.54834/16945220_2021_1_52

Поступила в редакцию 12. 01. 2022 г.

УДК 517.928

Алыбаев К.С.

д. ф.-м. н., профессор Жалал-Абадского госуд. универ. им. Б. Осмонова, Кыргызская Республика

Матанов Ш.М.

преп. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН БИРИНЧИ КОЗГОЛБОГОН ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНЕН БАШКАСЫНА ӨТҮҮСҮ

Бул жумушта изилдөөнүн предмети болуп комплекстик областтагы козголбогон теңдемесинин эки чечими болгон сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеме болуп саналат. Изилдөөнүн максаты болуп сингулярдуу козголгон теңдеменин чечиминин экинчисине өтүү мүмкүнчүлүгүн түшүндүрүү, сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин козголгонбогон теңдеменин чечимдерине тартылуу аймактарынын бар экендигин далилдөө жана алардын байланышын түзүү. Коюлган максаттарды жана милдеттерди ишке ашыруу үчүн дифференциалдык теңдеме интегралдык теңдемелерге алмаштырылат, гармониялык функциялардын деңгээл сызыгын колдонуу менен каралып жаткан аймак бир нече бөлүккө бөлүнөт. Андан ары функциялардын аналитикалык экендигин эске алуу менен интегралдоо жолдору тандалып алынат жана асимптотикалык методдорду колдонуу менен чечим үчүн ар бир бөлүктө асимптотикалык көрүнүштөр алынат. Каралып жаткан бөлүктөрдүн ар бири сингулярдуу козголгон теңдеменин чечиминин козголбогон теңдеменин бир чечимине тартылуу областы болоору далилденген. Автономдуу сингулярдуу козголгон теңдемелердин теориясында негизги жоболордун бири болуп релаксация термелүүлөрү саналат. Релаксациялык термелүүлөр автономдуу сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин туруктуулугун жоготкон бир тең салмактуулук абалынан башка туруктуу тең салмактуулук абалына өтүшүнүн ырааттуу алмашуусу менен пайда болот. Алынган натыйжалар сингулярдуу козголгон теңдемелердин кеңири классы үчүн колдонулууга болот.

Негизги сөздөр: *сингулярдык козголуу; гармоникалык функция; деңгээл сызыгы; интегралдоо жолдору; асимптотикалык баалоо; релаксация термелүүсү.*

ПЕРЕХОД РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ОДНОГО РЕШЕНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ К ДРУГОМУ

В данной работе предметом исследования является сингулярно возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение в комплексной области, невозмущенное уравнение которой имеет двух решений. Цель исследования выяснение возможности перехода решения сингулярно возмущенного уравнения к другому, доказательство существования областей притяжений решений сингулярно возмущенных уравнений к решениям невозмущенного уравнения и установления их взоимосвязи. Для реализации постановленных целей и задач дифференциальное уравнение заменяется интегральными применением линии уровней гармонических функций рассматриваемая область разделяется на несколько частей. Далее учитывая аналитичность функций выбираются пути интегрирования и с применением асимптотических методов для решения получены асимптотические представления в каждом из частей. Доказано, что каждая из рассматриваемых частей является областью притяжения решения сингулярно возмущенного уравнения к одному решению невозмущенного уравнения. В теории автономных сингулярно возмущенных уравнений одним основных положений является релаксационные колебания. Релаксационные колебания происходят при последовательном чередовании перехода решений автономных сингулярно возмущенных уравнений от одного положения равновесия, котороя теряет устойчивость, к другому устойчивому положению равновесия. Полученные результаты можно использовать для широкого класса сингулярно возмущенных уравнений.

Ключевые слова: *сингулярное возмущение; гармоническое функция; линия уровня; пути интегрирования; асимтотическая оценка; релаксационное колебание.*

TRANSITION OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS FROM ONE SOLUTION OF THE UNPERTURBED EQUATION TO ANOTHER

The object of study is a singularly perturbed ordinary differential equation in a complex domain, the unperturbed equation of which has two solutions. The subject of the study is to elucidate the possibility of passing the solution of a singularly perturbed equation to another one. The purpose of the study is to prove the existence of areas of attraction of solutions of singularly perturbed equations to solutions of an unperturbed equation and to establish their relationship. To implement the goals and objectives set, the differential equation is replaced by integral ones, using the level line of harmonic functions, the area under consideration is divided into several parts. Further, taking into account the analyticity of the functions, integration paths are chosen and, using asymptotic methods, asymptotic representations in each of the parts are obtained for the solution. It is proved that each of the considered parts is the domain of attraction of a solution of a singularly perturbed equation to one solution of an unperturbed equation. In the theory of autonomous singularly perturbed equations, one of the main provisions is relaxation oscillations. Relaxation oscillations occur with successive alternation of the transition of solutions of autonomous singularly perturbed equations from one equilibrium position, which loses stability, to another stable equilibrium position.The results obtained can be used for a wide class of singularly perturbed equations.

Key words: *singular perturbation; harmonic function; level lines; integration paths; asymptotic estimate; relaxation oscillation.*

Постановка задачи.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = 2(t+i)x(t,\varepsilon) - x^2(t,\varepsilon) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(-1,\varepsilon) = x^0 , \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр;

$t \in C$- множество комплексных чисел.

В (1) пологая $\varepsilon = 0$ получим не возмущенное уравнение

$$(t+i)\xi(t)-\xi^2(t)=0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет решения

$$\xi_1(t,\varepsilon)\equiv 0, \qquad \xi_2(t,\varepsilon)=2(t+i). \qquad (4)$$

В [1-3] исследованы возможности предельного перехода решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (1) – (2) к решениям (4). Переходы решения $x(t,\varepsilon)$ от одного решения (4) к другому не исследованы. В данной работе решим эту задачу

Решение задачи.

Задачу (1) – (2) заменим следующим

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon x^0 exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}\Big/\left(\varepsilon x^0 exp\frac{-2i}{\varepsilon}+x^0\int_{-1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau\right). \qquad (5)$$

Решение задачи разделим на две части: 1. Геометрическая; 2. Аналитическая .

1. Геометрическая часть.

Прежде чем решить поставленную задачу проведем геометрические построения. Для этого возьмём функцию

$$F(t)=(t+i)^2.$$

Пологая $t=t_1+it_2$ где $i=\sqrt{-1}$, t_1,t_2 —действительные переменные, будем иметь:

$$ReF(t)=t_1^2-(t_2+1)^2, \quad ImF(t)=2t_1(t_2+1).$$

На плоскости (t_1,t_2) начертим линии уровня функций $ReF(t), ImF(t)$.

Сначала рассмотрим линии уровня:

$$(p_0)=\{t\in C, ReF(t)=0\}, \qquad (q_0)=\{t\in C, ImF(t)=0\}.$$

Линии $(p_0),(q_0)$ в точке (0;0) разветвляются (рисунок 1).

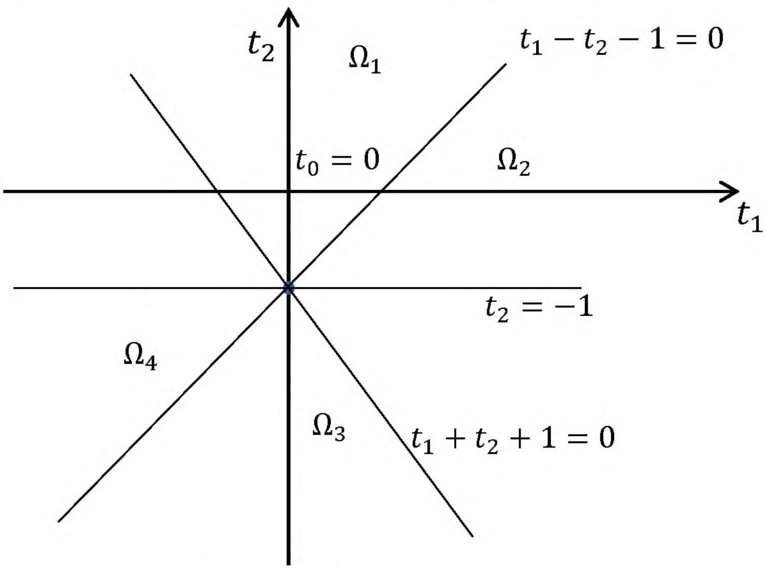

Рисунок 1. - Ветвляющееся линии уровня.

$(p_0),(q_0)$ плоскость (t_1,t_2) разделяют на четыре части, которые обозначим $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$.

Теперь рассмотрим линии уровня:

$$(p)=\{t\in C, ReF(t)=p-const\}$$

$$(q)=\{t\in C, ReF(t)=q-const\},$$

линии $(p),(q)$ являются гиперболами и их уравнения определяются так

$$t_2+1=\pm\sqrt{t_1^2-p}\ \ (p<0),\ t_1=\pm\sqrt{(t_2+1)^2+p}\ \ (p>0),$$

$$t_2+1=\frac{q}{2t_1}\ (q<0\ \ \vee q>0).$$

Линии $(p),(q)$ изображены на рисунке 2.

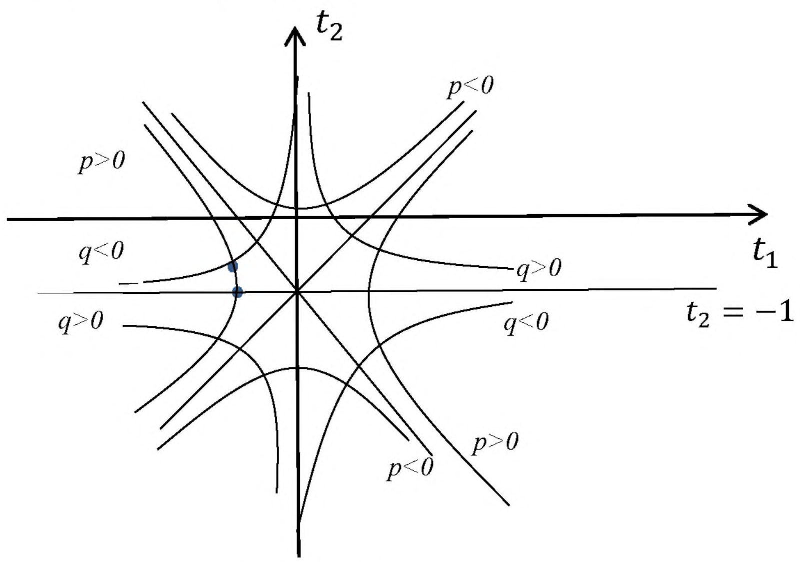

Рисунок 2. - Линии $(p),(q)$.

Из линий $(p),(q)$ составим путь интегрирования (l) для интеграла содержащегося в функции (5) (рисунок 3).

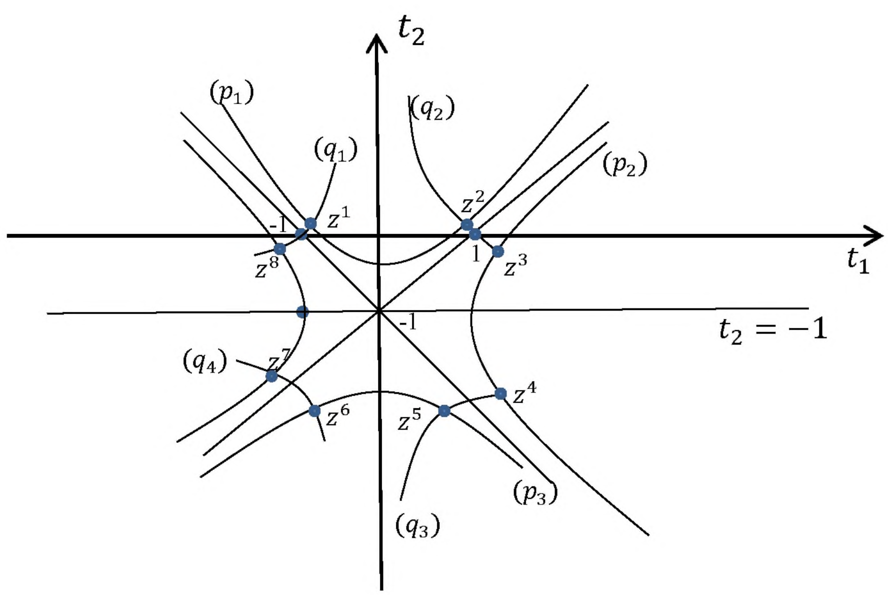

Рисунок 3.- Путь интегрирования (l).

Далее запись $(l)[\tilde{t},\tilde{\tilde{t}}]$ – означает часть кривой (l) соединяющее точки $\tilde{t}$ и $\tilde{\tilde{t}}$.

Путь (l) состоит: $(q_1)[(-1;0),z^1]$, $(p_1)[z^1,z^2]$, $(q_2)[z^2,z^3]$, $(p_2)[z^3,z^4]$, $(q_3)[z^4,z^5]$, $(p_3)[z^5,z^6]$, $(q_4)[z^6,z^7]$, $(p_4)[z^7,z^8]$.

2. Аналитическая часть.

Исследуем асимптотическое поведения функции (5) по пути (l) при $\varepsilon \to 0$. Далее будем считать, что линии $(p_j)(j=1,\dots,4)$ не проходят через малую окрестность (зависящих от ε) линии уровня (p_0). Асимтотическое поведение функции (5) определяется функциями:

$$\mathcal{J}_0(t,\varepsilon)=exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon},\ \ \mathcal{J}_1(t,\varepsilon)=\int_{-1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau.$$

1. Пусть $t\in p_1(p_1<0)$.

Для $t\in p_1: exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}=exp\frac{p_1+2it_1t_2}{\varepsilon}=o(\varepsilon^n), n\in N.$

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)=\int_{-1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau=\int_{-1}^{z^1} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau+\int_{z^1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau$$

(к каждому интегралу применим интегрирование по частьям)

$$=\int_{-1}^{z^1}\frac{\varepsilon}{2(\tau+i)}dexp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}+\int_{z^1}^{t}\frac{\varepsilon}{2(\tau+i)}dexp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}[\frac{1}{2(z^1+i)}exp\frac{(z^1+i)^2}{\varepsilon}-\frac{1}{2(i-1)}exp\frac{(i-1)^2}{3}+$$

$$+\int_{-1}^{z^1}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau+\frac{1}{2(t+i)}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{2(z^1+i)}exp\frac{(z^1+i)^2}{\varepsilon}+\int_{z^1}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{1}{2(i-1)}exp\frac{(i-1)^2}{\varepsilon}+\frac{1}{2(i+1)}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}+\int_{-1}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau\right),$$

$$\mathcal{J}_1(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{1}{2(i-1)}exp\frac{-2i}{\varepsilon}+\frac{1}{2(t+i)}exp\frac{(t+i)^2}{3}+\mathcal{J}_{11}(t,\varepsilon)\right),$$

где $\mathcal{J}_{11}(t,\varepsilon)=\int_{-1}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau.$

При $t\in(p_1)$, $exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, а $\mathcal{J}_{11}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$

В последном легко можно убедится применяя к $\mathcal{J}_{11}(t,\varepsilon)$ интегрирования по частьям. Таким образом в силу проведенных вычислений можно сделать вывод:

$$\forall t\in p_1\ (x(t,\varepsilon)\to 0\equiv \xi_1(\mathrm{t})\ \text{по}\ \varepsilon).$$

2. Пусть $t\in p_2$.

$$\forall t \in (p_2)\ \left(exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon} = exp\frac{p_2+2it_1(t_2+1)}{\varepsilon}\ \ p_2>0\right).$$

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon)=\int_{-1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau=\int_{-1}^{z^1} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau+$$

$$\int_{z^1}^{z^2} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau+\int_{z^2}^{z^3} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau+\int_{z^3}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau$$

(к каждому интегралу применим интегрирование по частям) =

$$=\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{1}{i-1}exp\frac{-2i}{\varepsilon}+\frac{1}{2(i+1)}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}+\int_{z^3}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau\right),$$

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{1}{i-1}exp\frac{-2i}{\varepsilon}+\frac{1}{(i+1)}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}+\int_{z^3}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau\right).$$

Для это случая функцию (5) перепишем в виде:

$$x=\varepsilon x^0/(\varepsilon exp\frac{-(t+i)^2-2i}{\varepsilon}+x^0\frac{\varepsilon}{2}(-\frac{1}{i-1}exp\frac{-(t+i)^2-2i}{\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{(i+1)}+\int_{z^3}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2-(t+i)^2}{\varepsilon}d\tau)$$

$\forall t \in (p_2)\ \left(exp\frac{-(t+i)^2}{\varepsilon}\to 0 \text{ по } \varepsilon\right)$, а функция $Re(\tau+i)^2$ в каждой точке τ принимает значения p_2. Следовательно

$$\int_{z^3}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2-(t+i)^2}{\varepsilon}d\tau=O(\varepsilon).$$

Тогда $\forall t \in (p_2)\ \left(x(t,\varepsilon)\to 2(t+i)=\xi_2(t)\right)$.

3. $t\in(p_3)$. $\forall t\in(p_3)\ \left(exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}=exp\frac{p_3+2it_1(t_2+1)}{\varepsilon}, p_3<0\right)$.

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon)=\int_{-1}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau=\int_{-1}^{z^1}+\int_{z^1}^{z^2}+\int_{z^2}^{z^3}+\int_{z^3}^{z^4}+\int_{z^4}^{z^5}+$$

$$\int_{z^5}^{t} exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau=\frac{\varepsilon}{2}(-\frac{1}{i-1}exp\frac{-2i}{\varepsilon}+$$

$$\frac{1}{t+i}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}+\int_{z^5}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau).$$

Поскольку

$$\forall t\in(p_3)\ \left(exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}\to 0 \text{ по } \varepsilon\right), \text{ то}$$

$\int_{z^5}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau)$ ограничена и $x(t,\varepsilon)\to 0\ \equiv \xi_1(t)$ по ε.

4. $t\in(p_4)$.

$$\mathcal{J}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}(-\frac{1}{i-1}exp\frac{-2i}{\varepsilon}+\frac{1}{t+i}exp\frac{(t+i)^2}{\varepsilon}+$$

$$+\int_{z^7}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2}{\varepsilon}d\tau).$$

Решение $x(t,\varepsilon)$ представим в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon x^0 / (\varepsilon exp\frac{-(t+i)^2-2i}{\varepsilon} + x^0\frac{\varepsilon}{2}(-\frac{1}{i-1}\times$$

$$\times\, exp\frac{-(t+i)^2-2i}{\varepsilon} + \frac{1}{(i+1)} + \int_{z^7}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2-(t+i)^2}{\varepsilon}d\tau))\,.$$

$$\forall t \in (p_4)\;\; (exp\frac{-(t+i)^2}{\varepsilon} = exp\frac{p_4+2it_1(t_2+1)}{\varepsilon}\;\; (p_4>0) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0 \;\text{ и}$$

$$\int_{z^7}^{t}\frac{1}{(\tau+i)^2}exp\frac{(\tau+i)^2-(t+i)^2}{\varepsilon}d\tau = O(\varepsilon)).$$

Тогда

$$\forall t \in (p_4)\;\; (x(t,\varepsilon) \to 2(t+i) \text{ по } \varepsilon).$$

Выводы:

1. Проведенные исследованяи показывают, что рассматриваемые части являются областьями притяжений решений сунгулярно возмущенного уравнения к одному из решений невозмущенного уравнения. Области притяжения чередуются и характеризуют переход от одного решения невозмущенного уравнения к другому;
2. Это явление перехода решения сингулярно возмущенного уравнение от одного решения невозмущенной задачи к другому имеет некоторое сходство с релаксационным колебанием в теории автономных сингулярно возмущенного уравнение;
3. Исследование перехода проведено без использавания устойчивости положения равновесия.

Список литература:

1. **Alybaev, K.S.** Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy [Текст] / A.B. Murzabaeva // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics. - 2018.P.020076-1-020076-5. Режим доступна http://doi.org/10.1063/1.5049070.
2. **Алыбаев, К.С.** Существование погранслойных линий для линейных сингулярно-возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Матер. II-Междун. конф. Актуальные проблемы, теории управления, топологии и оперативных уравнений.- Бишкек, 2013. – С. 83 - 88.
3. **Алыбаев, К.С.** Геометрическая теория сингулярно возмущенного уравнения Бернулли с точкой перевала[Текст] / К.С. Алыбаев, Ш.М. Матанов // Наука. Образование. Техника.- Ош: КУМУ, 2021.- №3 (72). - С. 40-50.
4. **Понтрягин, Л.С.** Периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных [Текст] / Л.С. Понтрягин.- 224 с.
5. **Мищенко, Е.Ф.** Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф. Мищенко, Н.Х.Розов // Физико-математической литературы.- Наука, 1975. - 248 с.

DOI:10.54834/16945220_2021_1_59

Поступила в редакцию 22. 01. 2022 г.