УДК 515.122

Жораев А.Х.
к.ф.-м.н., доцент Кыргызско-Узбекского Межд. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика

ЖАЛПЫЛАНГАН КИНЕМАТИКАЛЫК МЕЙКИНДИКТИ БАЙЛАНГАН КӨПТҮКТӨР АРКЫЛУУ АНЫКТОО

Бул жумушта изилдөө предмети болуп узун-туурасы бар көптүктөрдүн кыймылдоосу болгон кинематикалык мейкиндиктер. Иштин максаты - аксиоматикалык усул менен мындай мейкиндиктердин кеңейтилген классын аныктоо. Мейкиндикте байланган көптүктөрдүн табигый кыймылын аксиоматикалык аныктоо усулу колдонулган. Жалпыланган кинематикалык мейкиндиктердин аксиомалар системасы түзүлүп, алар кинематикалык топологиялык мейкиндиктин белгилүү аксиомалар системасын кеңейтет. Алынган жыйынтык Кыргызстанда түзүлгөн, компьютердин жардамы менен объекттерди башкарылуучу табигый кыймылдоосу болгон виртуалдык топологиялык мейкиндиктердин жалпы теориясынын өнүгүүсү болуп эсептелет. Бул жыйынтыкты виртуалдык мейкиндиктин ченемин эффективдүү издөөгө жана аныктоого мумкүнчүлүк берген программалык жабдуусуна пайдаланса болот. Келечекте практикалык мааниге ээ болгон виртуалдык мейкиндиктердин кассиеттерин объекттердин кыймылын практикалык пайдалануу, түзүү жана издөөнүн жалпы теориясын жаратуу болуп эсептелет.

Негизги сөздөр: *топологиялык мейкиндик; метрикалык мейкиндик; кинематикалык мейкиндик; компьютер; римандык бет; кыймылдоо; өлчөм; узундук.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ ПОМОЩИ СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ

Предметом исследования в данной работе являются кинематические пространства с возможностью внутреннего движения протяженных множеств. Цель работы - определить широкие классы таких пространств аксиоматическим способом. Используется метод аксиоматического определения естественного движения связных множеств в пространстве. Построена система аксиом для пространств, названных обобщенными кинематическими, она расширяет известную систему аксиом для кинематических топологических пространств. Полученный результат является развитием создаваемой в Кыргызстане общей теории виртуальных топологических пространств с управляемым естественным движением объектов, реализуемых на компьютере. Данный результат может быть использован для построения программного обеспечения, дающего возможность эффективно вести поиск и определять размерность виртуальных пространств. В перспективе предполагается создать общую теорию с практической реализацией движения, построения и поиска объектов, установления свойств виртуальных пространств, имеющую практические приложения.

Ключевые слова: *топологическое пространство; метрическое пространство; кинематическое пространство; компьютер; риманова поверхность; движение; размерность; длина.*

DEFINITION OF GENERALIZED KINEMATICAL SPACES BY MEANS OF CONNECTED SETS

In the paper kinematical spaces with possibility of inner motion of stretched sets are investigated. The aim of the paper is to define large classes of such spaces by the axiomatic way. The method of axiomatic definition of natural motion of connected sets in the space is used. A system of axioms of spaces called generalized kinematical ones is built; it enlarges the well-known axiomatic system for kinematical *topological spaces. The result obtained is a development of the general theory of virtual topological spaces with computer-implemented controlled natural motion of objects being created in Kyrgyzstan. This result can be used to build a soft yielding capacity of effective search and detecting dimension of virtual spaces. In the future, it is planned to create a general theory with practical implementation of motion, constructing and searching of objects and detecting of properties of virtual spaces having practical applications.*

Key words: *topological space; metrical space; kinematical space; computer; Riemann surface; motion; dimension; length.*

Введение

Топологические структуры на множествах строятся при помощи определения семейств подмножеств, удовлетворяющих некоторым свойствам.

Известное понятие кинематического пространства основано на минимальном времени передвижения точки из одного положения в другое. Однако передвижение протяженного объекта может занять больше времени. Чтобы обобщить понятие кинематического пространства, мы предлагаем использовать семейство подмножеств, имеющих «длину». Мы будем называть их “L-множества”.

Второй раздел содержит обзор известных в литературе определений для движения точек и множеств.

Третий раздел содержит новое определение обобщенного кинематического пространства и связанные с ним определения одномерного обобщенного кинематического пространства и «почти обозреваемого» обобщенного кинематического пространства.

Четвертый раздел содержит примеры обобщенных кинематических пространств, показывающих их специфику.

Мы будем использовать обозначения:

Т-пространства - топологические пространства;

М-пространства - метрические пространства;

К-пространства - кинематические пространства;

$R := (-\infty,\infty)$; $R_+ := [0, \infty)$; $Q^k := [0; 1]^k$, $k = 1, 2, 3,...$

Предыдущие определения для движения точек и множеств

О п р е д е л е н и е 1 [1]-[2]. *К-пространством* называется множество G точек и множество K ***маршрутов***. Каждый маршрут M – это пара, состоящая из положительного числа $T_M > 0$ (*время* маршрута) и функции $m_M : [0, T_M] \to G$ (*траектория* маршрута). Выполняются следующие аксиомы.

(K1) Для любых различных точек z_0, z_1 существует такой маршрут $M\in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких маршрутов M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$ {всегда возможно движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t)\ (0 \le t \le T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

Маршруты, существующие в силу этой аксиомы, называются *подмаршрутами* маршрута M.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1)=m_2(0)$, то пара:

число $T_{12} = T_1 + T_2$ и функция $m_{12}(t)= m_1(t)$ $(0 \le t < T_1)$; $m_{12}(t)= m_2(t-T_1)$ $(T_1 \le t \le T_1+T_2)$ также является маршрутом K {транзитивность}.

Для любой функции - траектории маршрута m_M: $[0, T_M] \to G$ множество ее значений называется *линией*.

Если обозначить через $\rho_K(z_0,z_1)$ точную нижнюю грань множества значений T_M в аксиоме (К1) и дополнительно положить $\rho_K(z,z)=0$, то из аксиом (К2), (К3), (К4) следует, что эта функция имеет все свойства метрики. Она называется кинематической метрикой.

О п р е д е л е н и е 2. Если в М-пространстве можно ввести такое множество маршрутов, что кинематическая метрика будет совпадать с метрикой этого пространства, то М-пространство называется *кинематизируемым*.

Не все М-пространства являются кинематизируемыми.

П р и м е р 1. Рассмотрим пространство

$$Q^* = \{(x,y)\in Q^2 \mid ((0\le x \le 1)\wedge(y=0))\vee((x=1)\wedge(0\le y \le 1))\}$$ с метрикой

$$\rho_0((x_1,y_1), (x_2,y_2)) := \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}.$$

Докажем, что оно не кинематизируемо. Имеем: $\rho_0((0,0), (1,1))=1$; $\rho_0((0,0), (1,0))=1$; $\rho_0((1,0), (1,1))=1$.

По аксиоме (К1) существует маршрут M, соединяющий точки $(0,0)$ и $(1,1)$ и имеющий время менее 1.5. По аксиоме (К3), существует его подмаршрут, соединяющий точки $(0,0)$ и $(1,0)$. Его время не менее 1. По аксиомам (К2) и (К3), также существует его подмаршрут, соединяющий точки $(0,1)$ и $(1,1)$. Его время не менее 1. По аксиоме (К4), время маршрута M равно сумме этих времен, то есть не менее 2. Это противоречиво.

Нами предложены [3]-[6]

О п р е д е л е н и е 3. Пусть в Т-пространстве G задано связное множество P. Будем говорить, что непрерывное отображение $F:P\times[0,T] \to G$ осуще-ствляет *движение* множества P, если для фиксированного $t\in[0, T]$ отбражение $F(z,t)$: $P \to G$ является инъективным и $F(P,t)$ гомеоморфно P.

Для подклассов класса Т-пространств соответственно гомеоморфизм заменяется на изоморфизм в соответствующем пространстве.

Для М-пространств нами было предложено

О п р е д е л е н и е 4. Два ограниченных М-пространства (два подмно-жества М-пространства) A и B называются *$[\alpha,\beta]$-подобными* $(0<\alpha<1<\beta)$, если существует биективное отображение $f: A\to B$ такое, что $\rho_B(f(x),f(y))\in[\alpha,\beta]\rho_A(x,y)$ и $\rho_A(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\in[\alpha,\beta]\rho_B(x,y)$.

Соответственно, в М-пространстве вводится понятие *обобщенное движение с сохранением $[\alpha,\beta]$-подобия*.

Определение 1 является наиболее общим представлением движения точки с ограниченной скоростью. Определения 3 и 4 для движения множеств являются более узкими. Поэтому мы предлагаем более широкие определения.

Определение обобщенных кинематических пространств

О п р е д е л е н и е 5. Существует семейство K связных L-множеств - связных подмножеств множества X, каждое L-множество имеет положительную *длину*. Если выполняются следующие условия, то X называется обобщенным кинематическим пространством.

(G1) Для любых $x_1 \neq x_2 \in X$ существует такое L-множество $M \in K$, что x_1 , x_2 $\in M$ и множество длин таких M ограничено снизу положительным числом; точная нижняя грань называется обобщенным кинематическим расстоянием ρ_X между x_1 и x_2.

(G2) Для x_1 , x_2 $\in M_1$ и x_2 , x_3 $\in M_2$ существует такое L-множество $M_3 \in K$, что x_1 , x_2, x_3 $\in M_3$ и $length(M_3) \leq length(M_1) + length(M_2)$.

Если также

(G3) Для любых $x_1 \neq x_2 \in X$ существует такое L-множество $M_{12} \in K$, что $length(M_{12}) = \rho_X(x_1 , x_2)$, то обобщенное кинематическое пространство X называется *плоским* (по отношению к K).

Если L-множество является *маршрутом*, то Определение 5 обобщает Определение 1.

Следующие определения обобщают определения для кинематических пространств.

О п р е д е л е н и е 6. Если само множество X является L-множеством, то обобщенное кинематическое пространство X называется одномерным (по отношению к K).

О п р е д е л е н и е 7. Ограниченное обобщенное кинематическое пространство X называется "почти наблюдаемым" (по отношению к K), если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \in K)$*(Хаусдорфово расстояние между множеством X и L-мно-жеством M меньше* ε*)*.

Обозначим точную нижнюю грань длин таких L-множеств в зависимости от ε как $W\text{-}K_\varepsilon(X)$.

Таким образом, мы получаем "Minkovski-K" $Min\text{-}K$-размерность:

О п р е д е л е н и е 8. $Min\text{-}K(X) := lim\{ -logW\text{-}K_\varepsilon(X)/log\ \varepsilon \mid \varepsilon \to 0\}$.
Если этот предел не существует, то можно рассмотреть $lim\ inf$ ($Min\text{-}K\_$) и $lim\ sup$ ($Min\text{-}K_+$). Это определение является аналогом определения [7].

Примеры обобщенно-кинематических пространств

П р и м е р 2. (См. Пример 1). Пространство Q^* с метрикой $\rho_0((x_1,y_1), (x_2,y_2))$ не кинематизируемо в смысле Определения 1.

Определим обобщенно-кинематическое пространство Q^{**} следующим образом. Пусть L-множества в Q^{**} - это пересечения квадратов

$$S(x_0,y_0,h):= \{(x,y) \mid 0 \leq x_0 \leq x \leq x_0+h \leq 1;\ 0 \leq y_0 \leq y \leq y_0+h\},\ h<1,$$

с длинами h, с множеством Q^*.

Тогда множество пар точек из Q^{**}
$\{(x_1,y_1), (x_2,y_2)\} \subset S(min\{x_1,x_2\}, min\{y_1,y_2\}, max\{\mid x_1 - x_2 \mid, \mid y_1 - y_2 \mid\}) \cap Q^*$ имеет длину, равную $\rho_0((x_1,y_1), (x_2,y_2))$.

Следовательно, пространство Q^{**} с метрикой ρ_0 обобщенно кинематизи-руемо.

П р и м е р 3. Топологический тор. Рассмотрим пространство Q^k, $k>1$. Отождествим точки $(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_k)$ и $(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_k)$, 0 или 1 стоят на j-месте, $j= 1..k$.

Выберем число ε, $0<\varepsilon<1/2$. В качестве базиса семейства K возьмем шары радиуса ε (ε-шары). Для двух уже построенных элементов M_1 и M_2 семейства K, имеющих непустое

Выберем число ε, $0<\varepsilon<1/2$. В качестве базиса семейства K возьмем шары радиуса ε (ε-шары). Для двух уже построенных элементов M_1 и M_2 семейства K, имеющих непустое пересечение, построим множество M_3 следующим образом.

Пусть ε-шары $S_1 \subset M_1$ и $S_2 \subset M_2$ имеют непустое пересечение (такие ε-шары обязательно существуют, поскольку элементы семейства K являются объединениями ε-шаров). Обозначим через V_{12} выпуклую оболочку множества $S_1 \cup S_2$ и введем в семейство K еще один элемент $M_1 \cup M_2 \cup V_{12}$. Длиной этого элемента является максимум из минимальных длин кривых, соединяющих точки, внутри этого элемента. Все элементы семейства K получаются при помощи конечного количества таких действий.

Таким образом, пространство Q^k с семейством K удовлетворяет Определению 5 и представляет естественное движение шаров.

Выводы:

1. Введены новые определения обобщенных кинематических пространств с возможностью внутреннего движения связных множеств;
2. Даны новые определения размерностей обобщенных кинематических пространств на основе движения;
3. Построена система аксиом для обобщенных кинематических пространств, она расширяет известную систему аксиом для кинематических топологических пространств.

Список литературы:

1. **Борубаев, А.А.** Компьютерные представления кинематических топологических пространств [Текст] / А.А.Борубаев, П.С. Панков. – Б.: КГНУ, 1999.
2. **Borubaev, A.A.** Spaces Uniformed by Coverings [Текст] / A.A.Borubaev, P.S. Pankov, A.A.Chekeev. - Budapest: Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, 2003.
3. **Жораев, А.Х.** Исследование топологических пространств кинематическим методом [Текст] / А.Х. Жораев // Saarbrűcken.- Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 78 с.
4. **Zhoraev, A.H.** Motion of sets and orientation dimension of kinematical spaces [Текст] / A.H. Zhora // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. - Astana: L.N.Gumilyov Eurasian National University, 2017. - 124p.
5. **Zhoraev, A.** Orientation dimension and orientation constants of kinematical spaces [Текст] / A.H. Zhoraev // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology и operator equations". - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. - 36 p.
6. **Жораев, А.Х.** Индуктивное определение кинематической размерности топологических пространств [Текст] / А.Х. Жораев // Вестник Института математики НАН КР. – Бишкек, 2018.- № 1. - С. 139-144.
7. **Александров, П.С.** Введение в теорию размерности [Текст] / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. – М.: Наука, 1973.
8. **Панков, П.С.** Кинематические размерности топологических пространств [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №2. – С. 103– 106.
9. **Панков, П.С.** Методика экспериментального исследования свойств кинематических пространств [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2017. – №2. – С. 23– 26.
10. **Жораев, А.Х.** Движение протяженных объектов в кинематических пространствах [Текст] / А.Х.Жораев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2018. – №1. – С. 47– 50.

DOI:10.54834/16945220_2021_1_41

Поступила в редакцию 08. 01. 2022 г.