УДК 514.7

Азимов Б.А.
к.ф.-м.н., доцент Ошского госуд. универ., Кыргызская Республика

E_4 МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШОО ШАРТТАРЫ

Изилдөөнүн предмети болуп төрт ченемдүү Евклиддик E_4 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуу. Изилдөөнүн максаты: E_4 мейкиндигин бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыгынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттарын табуу. Изилдөөнүн методдору болуп Картандын сырткы формалар методу, кыймылдуу репер методу. Алынган жыйынтыктар: Эки ченемдүү Δ_2 бөлүштүрүүсүнө таандык болгон сызыктын каралып жаткан бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген. Алынган жыйынтыктардын айырмачылыктары: эки ченемдүү бөлүштүрүүгө таандык болгон сызыктын каралып жаткан бөлүктөп чагылтуунун кошмок сызыгы болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары биринчи жолу изилденип жаткандыктан, алынган жыйынтыктар жаңы болуп эсептелинет. Илим жана практика үчүн сунуштама: алынган жыйынтыктар дифференцирленүүчү чагылтуулар теориясында колдонуу үчүн сунушталат.

Негизги сөздөр: *евклиддик мейкиндик; бөлүктөп чагылтуу; эки ченемдүү бөлүштүрүү; кошмок сызык.*

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВО E_4

Предметом исследования в данной статье частичное отоброжение Евклидова четырехмерного пространство E_4. Цель исследования: найти необходимое и достаточное условие существования двойных линий частичного отображения пространство E_4. Методом исследования является метод внешних форм Картана, метод подвижного репера. Полученные результаты доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы линия, принадлежащая двухмерному распределению Δ_2, являлась двойной линией рассматриваемого частичного отоброжения. Отличие полученных результатов: нахождение необходимого и достаточного условия для того, чтобы линия, принадлежащая двухмерному распределению, являлась двойной линией отоброжения исследована впервые, поэтому полученные результаты являются новыми. Полученные результаты рекомендуется для использования в теории дифференцируемых отоброжений.

Ключевые слова: *Евклидово пространство; частичное отображение; двухмерное распределение; двойная линия.*

CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF DOUBLE LINES OF PARTIAL MAPPING OF THE SPACE E_4

Subject of research: Partial mapping of the Euclidean 4-dimensional space E_4. Goal of *research: Find the necessary and sufficient conditions for the existence of double lines of a partial mapping of space E_4. Research methods: Cartan's method of external forms and moving reper method. Received results: Necessary and sufficient conditions are proved for a line, belonging to a two – dimensional distribution to be a double line of the considered partial mapping. Difference of research results: Finding the necessary and sufficient conditions for the line belonging to the distribution Δ_2, was double line of the considered partial mapping studied for the first time. Therefore, the obtained results are new. Recommendations for science and practice: The obtained results are recommended for further research in the theory of differentiable mappings.*

Key words: *Euclidean space; partial mapping; two-dimensional distribution; double line.*

Введение. Чатичная отображения евклидова пространства порождаемые заданным семейством гладких линий исследованы в работах [1-3] Г. Матиевой, Т.М. Папиевой.

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \epsilon \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1,2,3,4)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [4 - 5] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \; D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе $\tilde{\Sigma}_4$ для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети $\tilde{\Sigma}_4$, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2.1.2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (2.1.3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формулу (2.1.2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

В силу равенства (2.1.3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell$$

или

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0$$

Или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [67] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k} = B_{ijm}^{k}\omega^{m}\,, \tag{5}$$

где, $B_{ijm}^{k} = \Lambda_{ijm}^{k} + \Lambda_{i\ell}^{k}\Lambda_{jm}^{\ell} + \Lambda_{\ell j}^{k}\Lambda_{im}^{\ell}$.

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k}, \Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^{1} заданного семейства имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2, \\ d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3, \\ d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4, \\ d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

и

$$\Lambda_{11}^{3} = -\Lambda_{31}^{1} = 0,\ \Lambda_{11}^{4} = -\Lambda_{41}^{1} = 0, \tag{6}$$

$$\Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0. \tag{7}$$

Здесь, $k_1^1 = \Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^{4}$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где: d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [6] F_i^j $(i\neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i\,. \tag{8}$$

На каждой касательной $(X,\vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X,\vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X,\vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X,\vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X,\vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ в $\Omega\subset E_4$ называется циклической сетью Френе [48], если реперы $\mathfrak{R}_1 = (X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\mathfrak{R}_2 = (X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1)$, $\mathfrak{R}_3 = (X,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\mathfrak{R}_4 = (X,\vec{e}_4,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно.

Пусть, сеть $\tilde{\Sigma}_4$, является циклической сетью Френе. Тогда репер $\mathfrak{R}_{\bar{i}}$ является репером Френе для линии $\omega^{\bar{i}}$ $(\bar{i} = 2,3,4)$.

Формулы Френе для линии ω^2 имеют вид:

$$\begin{aligned} d_2\vec{e}_2 &= \Lambda_{22}^{3}\vec{e}_3, \\ d_2\vec{e}_3 &= \Lambda_{32}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^{4}\vec{e}_4 = -\Lambda_{22}^{3}\vec{e}_2 + \Lambda_{32}^{4}\vec{e}_4, \\ d_2\vec{e}_4 &= \Lambda_{42}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{42}^{3}\vec{e}_3 = -\Lambda_{32}^{4}\vec{e}_3 + \Lambda_{42}^{1}\vec{e}_1, \\ d_2\vec{e}_1 &= \Lambda_{12}^{4}\vec{e}_4 = -\Lambda_{42}^{1}\vec{e}_4 \end{aligned}$$

и имеют место следующие соотношения:

$$\Lambda_{22}^{1} = -\Lambda_{12}^{2} = 0,\quad \Lambda_{22}^{4} = -\Lambda_{42}^{2} = 0, \tag{9}$$

$$\Lambda_{32}^{1} = -\Lambda_{12}^{3} = 0, \tag{10}$$

где, $k_1^2 = \Lambda_{22}^3$, $k_2^2 = \Lambda_{32}^4$, $k_3^2 = \Lambda_{12}^4$ – первая, вторая и третья кривизны линии сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_2 – символ дифференцирования вдоль линии ω^2.

Так как репер $\Re_3 = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ является репером Френе для линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$, то имеют место следующие равенства:

$$d_3\vec{e}_3 = \Lambda_{33}^4\vec{e}_4,$$
$$d_3\vec{e}_4 = -\Lambda_{33}^4\vec{e}_3 + \Lambda_{43}^1\vec{e}_1,$$
$$d_3\vec{e}_1 = -\Lambda_{43}^1\vec{e}_4 + \Lambda_{13}^2\vec{e}_2,$$
$$d_3\vec{e}_2 = -\Lambda_{13}^2\vec{e}_1,$$

также

$$\Lambda_{33}^1 = -\Lambda_{13}^3 = 0,\ \Lambda_{33}^2 = -\Lambda_{23}^3 = 0, \tag{11}$$

$$\Lambda_{43}^2 = -\Lambda_{23}^4 = 0, \tag{12}$$

где, $k_1^3 = \Lambda_{33}^4$, $k_2^3 = \Lambda_{43}^1$, $k_3^3 = \Lambda_{13}^2$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^3 сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_3 – символ дифференцирования вдоль этой линии.

Репер $\Re_4 = \left(X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ является репером Френе для линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$. Тогда формулы Френе для этой линии имеют вид:

$$d_4\vec{e}_4 = \Lambda_{44}^1\vec{e}_1,$$
$$d_4\vec{e}_1 = -\Lambda_{44}^1\vec{e}_4 + \Lambda_{14}^2\vec{e}_2,$$
$$d_4\vec{e}_2 = -\Lambda_{14}^2\vec{e}_1 + \Lambda_{24}^3\vec{e}_3,$$
$$d_4\vec{e}_3 = -\Lambda_{24}^3\vec{e}_2$$

и имеют место соотношения:

$$\Lambda_{44}^2 = -\Lambda_{24}^4 = 0,\ \Lambda_{44}^3 = -\Lambda_{34}^4 = 0, \tag{13}$$

$$\Lambda_{14}^3 = -\Lambda_{34}^1 = 0. \tag{14}$$

где, $k_1^4 = \Lambda_{44}^1$, $k_2^4 = \Lambda_{14}^2$, $k_3^4 = \Lambda_{24}^3$ – первая, вторая и третья кривизны линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$, d_4 – символ дифференцирования вдоль этой линии.

1. Материалы исследования.

Найдем необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия γ принадлежащая распределению $\Delta_2 = \left(x, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$, являлась двойной линией рассматриваемого частичного отображения.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$, определяемый радиус-вектором:

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \tag{15}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega\subset E_4$, псевдофокус F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2\subset E_4$. Получается частичное отображение $f_3^2:\Omega\to\Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X)=F_3^2$. Присоединим к области Ω_3^2 подвижной репер $\Re'=\left(F_3^2,\vec{m}_1,\vec{m}_2,\vec{m}_3,\vec{m}_4\right)$, где векторы $\vec{m}_i$ определяются следующим образом. Продифференцируя обычным образом равенство (2.2.1) и учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2=d\left(\vec{X}-\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3\right)=d\vec{X}-d\left(\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\right)\vec{e}_3-\frac{1}{\Lambda_{32}^2}d\vec{e}_3=\omega^i\vec{e}_i+\frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i.$$

В силу равенства (2.1.4) отсюда получим:

$$d\vec{F}_3^2=\omega^i\vec{e}_i+\frac{\left(\Lambda_{32m}^2+\Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell+\Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell\right)\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^i\vec{e}_i.$$

Введем обозначение:

$$B_{32m}^2=\Lambda_{32m}^2+\Lambda_{3\ell}^2\Lambda_{2m}^\ell+\Lambda_{\ell 2}^2\Lambda_{3m}^\ell.$$

Тогда, в силу равенства (2.2.1), отсюда имеем:

$$d\vec{F}_3^2=\omega^i\vec{e}_i+\frac{B_{32m}^2\omega^m}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{3m}^i\omega^m}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i$$

или

$$d\vec{F}_3^2=\left[\vec{e}_1+\frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^1+\left[\vec{e}_2+\frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^2+$$

$$+\left[\vec{e}_3+\frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^3+\left[\vec{e}_4+\frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i\right]\omega^4.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1&=\vec{e}_1+\frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{31}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_2&=\vec{e}_2+\frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{32}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_3&=\vec{e}_3+\frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{33}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i;\\
\vec{m}_4&=\vec{e}_4+\frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3-\frac{\Lambda_{34}^i}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_i.
\end{aligned}\tag{16}$$

Тогда имеем:

$$d\vec{F}_3^2=\omega^1\vec{m}_1+\omega^2\vec{m}_2+\omega^3\vec{m}_3+\omega^4\vec{m}_4.$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе равенства (16) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\vec{m}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{321}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \\
\vec{m}_2 &= \frac{B_{322}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \\
\vec{m}_3 &= \left[1 + \frac{B_{323}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4; \\
\vec{m}_4 &= -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{B_{324}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4.
\end{aligned} \tag{17}$$

Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны (то есть лежат в одной плоскости) [7].

Рассмотрим линию γ, принадлежащую двумерному распеределению $\Delta_2 = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$. Ее касательный вектор имеет вид: $\vec{\gamma} = \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4$. Касательный вектор линии $\overline{\gamma} = f_3^2(\gamma)$ определяется следующим образом:

$$\vec{\overline{\gamma}} = \gamma^3\vec{m}_3 + \gamma^4\vec{m}_4.$$

Учитывая формулу (2.2.3) отсюда получим:

$$\vec{\overline{\gamma}} = \gamma^3\left(m_3^3\vec{e}_3 + m_3^4\vec{e}_4\right) + \gamma^4\left(m_4^2\vec{e}_2 + m_4^3\vec{e}_3 + \vec{e}_4\right),$$

где m_i^j – j-тая координата вектора $\vec{m}_i$.

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\vec{\overline{\gamma}} = \gamma^4 m_4^2\vec{e}_2 + \left(\gamma^3 m_3^3\vec{e}_3 + \gamma^4 m_4^3\right)\vec{e}_3 + \left(\gamma^3 m_3^4 + \gamma^4\right)\vec{e}_4.$$

Из условия компланарности векторов $\vec{\gamma}, \vec{\overline{\gamma}}$, $\overline{XF_3^2}$ имеем: $\left(\vec{\gamma}, \vec{\overline{\gamma}}, \overrightarrow{XF_3^2}\right) = 0$.

Отсюда получим: $\gamma^4 m_4^2 = 0$.

Учитывая (2.2.3) отсюда получим: $\gamma^4 \dfrac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2} = 0$ или $\gamma^4\Lambda_{34}^2 = 0$,

где, $\Lambda_{34}^2 = -\Lambda_{24}^3 = -k_3^4$ – третья кривизна линии ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$.

Из последнего условия имеем:

1) $\gamma^4 = 0$ или
2) $\Lambda_{34}^2 = 0$.

1) Когда $\gamma^4 = 0$, то касательная линии $\gamma \in \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ совпадает с прямой $\left(X, \vec{e}_3\right)$.
2) Если $\Lambda_{34}^2 = 0$, то линия ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ лежит в трехмерном пространстве $\left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$.

Следовательно, если линия $\gamma \in \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ является двойной линией частичного отображения f_3^2, то имеет место по крайней мере одного из условий 1), 2) (может иметь место условия 1), 2) одновременно).

Верно и обратное утверждение. Если имеет место одного из условий 1), 2) (или одновременно эти условия), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_2 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, является двойной линией частичного отображения $f_3^2 : \Omega \to \bar{\Omega}$.

Таким образом доказана теорема

Теорема. Линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_2 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, является двойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) Если касательная линии γ совпадает с прямой $(X, \vec{e}_3)$;
2) Если линия ω^4 сети $\ddot{\Sigma}_4$ лежит в трехмерном пространстве $\Delta_2 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Выводы:

1. Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы линия γ, принадлежащая двумерному распределению $\Delta_2 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, являлась двойной линией рассматриваемого частичного отображения;

2. Доказано, что линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_2 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, является двойной линией частичного отображения f_3^2 тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: если касательная линия γ совпадает с прямой $(X, \vec{e}_3)$; если линия ω^4 сети $\ddot{\Sigma}_4$ лежит в трехмерном пространстве $\Delta_2 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Список литературы:

1. **Матиева, Г.** Геометрия частичного отображния евклидова пространства, порождаемого заданным семейством гладких линий [Текст] / Г. Матиева, Т.М. Папиева // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим, 2010. – С. 180-184.
2. **Папиева, Т.М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства [Текст] / Т.М. Папиева // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим, 2010. – С. 185-189.
3. **Папиева, Т.М.** Двойные линии частичного отображения евклидова пространства, порождаемого заданной циклической сетью Френе [Текст] / Т.М. Папиева // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 43. – Б.: Илим, 2010. – С. 199-203.
4. **Рашевский, П.К.** Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва, Наука, 1967. – С. 481- 482.
5. **Папиева, Т.М.** Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим, 2009. – С. 294 - 298.
6. **Базылев, В.Т.** Многомерное сети двойных линий [Текст] / В.Т. Базылев // Дифференциальная геометрия многообразии фигур.– Москва, 1975. – С. 19-25.
7. **Абдуллаева, Ч.Х.** О существовании двойных линий частичного отображения пространства E_4 [Текст] / Ч.Х. Абдуллаева, Н.Н. Курбанбаева, Акылбек у.Н. // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №3. – С. 37– 30.
8. **Абдуллаева, Ч.Х.** О существовании неподвижных прямых в частичном отображении трехмерного евклидова пространства [Текст] / Ч.Х. Абдуллаева, Жамшитбек к. К., О.М. Кенжаев // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №1. – С. 31– 35.
9. **Абдуллаева, Ч.Х.** Необходимое и достаточное условие существования квазидвойной линии пары (f_i^5, Δ_4) в евклидовом пространстве E_6 [Текст] / [Ч.Х. Абдуллаева, М.Х. Абдулазизова, Б.Т.Адиева, Б.У. Кулматова] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. – №2. – С. 13– 20.

DOI:10.54834/16945220_2022_2_53

Поступила в редакцию 08. 04. 2022 г.