УДК 514.7

Азимов Б.А.
к.ф.-м.н., доцент Ошского госуд. универ., Кыргызская Республика

E_{P+3} МЕЙКИНДИГИНДЕ БЕРИЛГЕН V₃ БЕТИНЕ БИРИКТИРИЛГЕН БЕТТИН АЙРЫМ КАСИЕТТЕРИ

Бул жумушта изилдөөнүн предмети: Евклиддик E_{p+3} мейкиндигинде берилген V₃ бетине бириктирилген бет. Изилдөөнүн максаты E_{p+3} мейкиндигинде берилген V₃ бетине бириктирилген беттин теңдемеси боюнча анын касиеттерин изилдөө. Изилдөөнүн методдору болуп Картандын сырткы формалар методу, кыймылдуу репер методу. Алынган жыйынтыктар боюнча E_{p+3} мейкиндигинде V₃ бетине бириктирилген беттин төмөндөгүдөй касиеттери далилденген: а) бириктирилген бет экинчи тартиптеги конус боло албайт; б) бириктирилген бет t индекстүү гипербола болушунун; в) бириктирилген бет эллипсоид болушунун зарыл шарттары табылган. Алынган жыйынтыктардын айырмачылыктары: : p=3, n=p+3 болгон учур алгачкы жолу каралып жаткандыктан, алынган илимий жыйынтыктар, б.а. бириктирилген беттин касиеттери жаңы болуп эсептелет. Илим жана практика үчүн сунуштама алынган жыйынтыктар дифференциалдык геометриянын беттер теориясында колдонуу үчүн сунушталат.

Негизги сөздөр: *евклиддик мейкиндик; бет; бириктирилген бет; k-көптүспөлдүүлүгү.*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРИСОЕДИНЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ К ДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ V3 В ПРОСТРАНСТВЕ E_{P+3}

В данной работе предмет исследования является присодениненная поверхность к данной поверхности V₃ в пространстве E_{p+3}. Цель исследования свойств присоединенной поверхности к данной поверхности V₃ в пространстве E_{p+3} по ее уравнению. Методы исследования внешних форм Картана и метод подвижного репера. По полученным результатом доказаны следующие свойства присоединенной поверхности к данной поверхности V₃ в пространстве E_{p+3}: а) присоединенная поверхность не может быть конусом второго порядка; найдены необходимые условия для того, чтобы; б) присоединенная поверхность была гиперболой индекса t; в) присоединенная поверхность была эллипсоидом. Отличие полученных результатов: поскольку впервые рассматривается случай, когда: p=3, n=p+3, полученные результаты является новыми. Полученные результаты рекомендуется для применения в теории поверхностей дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: *Евклидово пространство; поверхность; присоединенная поверхность; k-многообразие.*

SOME PROPERTIES OF THE ATTACHED SURFACE TO THE GIVEN SURFACE V₃ IN SPACE E_{P+3}

Subject of research: Attached surface to the given surface V₃ in space E_{p+3}. Goal of research: Investigation of properties of attached surface to the given surface V₃ in space E_{p+3}. Research methods: Cartan's method of external forms and moving reper method. Received results: The following properties of attached surface to the given surface V₃ in space E_{p+3} are proved: a) The attached surface cannot be a second order cone; necessary conditions are found for the; b) Attached surface to be a hyperbola of index t; c) Attached surface to be an ellipsoid. Difference of research results: Since for the first time we consider the case, when : p=3, n=p+3, the obtained results are new. Recommendations for science and practice: The obtained results are recommended for further research in the theory of surfaces of differential geometry.

Key words: *Euclidean space; surface; attached surface; k-manifold.*

Киришүү. E_n мейкиндигинде берилген $V_p(p<n)$ бетине бириктирилген бет түшүнүгүн "k-көптүспөлдүүлүк" деген аталышта биринчи жолу Д. И. Перепелкин аныктаган. V_p бетине бириктирилген бет менен берилген V_p бетинин касиеттеринин ортосундагы байланыштар В.Т. Базылевдун жана анын окуучуларынын эмгектеринде изилденген [1-6].

Бул макалада E_{p+3} мейкиндигинде берилген V_3 бетине бириктирилген беттин айрым касиеттери изилденген.

Изилдөөнүн матералдары жана методдору

$\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i, \vec{e}_a), (i, j, k = 1, \ldots, p; \alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n)$ реперине карата $V_p \subset E_n$, t бетин карайбыз, мында $\sum_p \subset V_p$ торчосундагы ийри сызыктарга жүргүзүлгөн жанымалар болушат, ал эми $\vec{e}_\alpha - N_\alpha(X)$ нормаль тегиздигинде ортонормаланган базисти түзүшөт, анын үстүнө $\vec{e}_n$ вектору V_p бетинин орточо ийрилик векторуна $\left(\vec{M} = \frac{1}{p} g^{ij} b_{ij}^{\alpha} \vec{e}_\alpha\right)$ коллинеардуу деп алабыз. $\mathfrak{R}$ реперинин деривациондук тендемелери төмөндөгүдөй көрүнүштө болот

$$\frac{\overline{dv}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\, \overline{p} + v \nabla^2 \vec{\vartheta}$$

(1)

Бул векторлорго карата V_p бети төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\omega^{a} = 0 \tag{2}$$

Төмөнкүдөй белгилөө жасайлы: $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$. “Экинчи” параметрлерди өзгөрткөн мезгилде (б.а. X чекити кыймылсыз болуп, $\vec{e}_i$ жана $\vec{e}_\alpha$ векторлору эркин айлануу кыймылында болгон учурда) γ_{ij} чоңдуктары төмөдөгүдөй өзгөрүшөт:

$$\vec{e}_{i'} = C_{i'}^{i} \vec{e}_i, \vec{e}_{j'} = C_{j'}^{j} \vec{e}_j,$$

$$\gamma_{i'j'} = C_{i'}^{i} C_{j'}^{j} \vec{e}_i, \vec{e}_j = C_{i'}^{i} C_{j'}^{j} \gamma_{ij}.$$

Бул жыйынтык γ_{ij} чоңдуктары $X \epsilon V_p$ чекитинде эки жолу коварианттык тензорду түзүшө тургандыгын билдирет, ал эми V_p бетинде тензордук талааны аныкташат.

det $||\gamma_{ij}||$ - Граммдын аныктагычы алгебра курсунан белгилүү:

$\{\vec{e}_i\}$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес болушкандыктан,

det $||\gamma_{ij}|| \neq 0$, б.а. (γ_{ij}) матрицасы кубулбаган болот.

γ_{ij} чоңдуктарын V_p бетинин “биринчи негизги метрикалык тензору” деп аташат.

(1) Барабарсыздыкты сырттан дифференцирлейли:

$$D\omega^{\alpha} = 0 \Rightarrow \omega^{i} \wedge \omega_i^{\alpha} = 0$$

Картандын леммасы [1] боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$\omega_i^{\alpha} = b_{ij}^{\alpha} \omega^{j}, \tag{3}$$

$$\left(b_{ij}^{\alpha} = b_{ji}^{\alpha}\right).$$

$\{b_{ij}^{\alpha}\}$ чоңдуктары тензорду түзүшө тургандыгы белгилүү жана аны V_p бетинин “экинчи негизги тензору” деп аташат.

Эгерде $N_{n-p}(X)$ нормалдын тегиздигинде $\vec{e}_\alpha$ координаталык векторлорун башка базис менен алмаштырсак, анда b_{ij}^{c} чоңдуктары вектордун координаталары катарында өзгөрүшөт. Ошондуктан төмөндөгүдөй векторлорго ээ болобуз:

$$\vec{b}_{ij} = \vec{b}_{ji} = b_{ij}^{\alpha} \vec{e}_\alpha \in N_{n-p}(X),$$

i, j индекстери боюнча симметриялуулукту эске алсак, анда мындай векторлордун саны $\frac{p(p+1)}{2}$ даана болот.

$\vec{b}_{ij}$ векторлорунун ичинен сызыктуу көз каранды эместеринин санын q аркылуу белгилейли.

$$q_{max} = \frac{P(p+1)}{2}.$$

X чекитинде $\vec{b}_{ij}$ векторлору $N_q(X)$ тегиздигин аныкташат,

$$N_q(X)\subset N_{n-p}(X)$$

$\vec{e}_a\left(a,b,=p+1,\ldots,\ p+q\right)$ векторлордун $N_q(X)$ тегиздигинде жайланыштыралы. Анда $\vec{b}_{ij}$ векторлору жалаң гана $\vec{e}_a$ векторлорду аркылуу туюнтулушат:

$$\vec{b}_{ij}=b_{ij}^{\alpha}\vec{e}_a\left(b_{ij}^{\sigma}=0,\sigma=p+q+1,\ldots,n\right)$$

Ошентип, V_p бети q даана экинчи квадраттык формаларга ээ болот:

$$\Phi^a=b_{ij}^{\alpha}\omega^i\omega^j\ .$$

$N_q\left(X\right)$ нормалдык тегиздигинде $y\epsilon N_q(X)$ чекитин алалы. Бул чекит төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\vec{y}=\vec{X}+y^a\vec{e}_a\ . \tag{4}$$

Ушул барабардыкты дифференцирлейли

$$d\vec{y}=\left(\omega^i+y^a\omega_a^i\right)\vec{e}_i+\left(dy^b+y^a\omega_a^b\right)\vec{e}_b+y^a\omega_a^{\sigma}\vec{e}_{\sigma}\ .$$

$d\vec{y}\in N_{n-p}\left(X\right)$ болсун деп шарт коелу.

Анда

$$\omega^i+y^a\omega_a^i=0 \tag{5}$$

орун алат. Мындан

$$\omega_a^i=-\gamma^{ik}b_{kj}^a\omega^j \tag{6}$$

келип чыгат. Акыркыны (2.2.2)ге ордуна коебуз жана ω^i нин ордуна $\omega^i=\delta_j^i\omega^j$ ны жазабыз. Анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\left(\sum_a\gamma^{ik}b_{kj}^a y^a-\delta_j^i\right)\omega^j=0 \tag{7}$$

(i – эркин индекс, $i=1,\ \ldots,p$), б.а. ω^j формасына карата сызыктуу, бир тектүү p даана теңдемелердин системасына ээ болдук. Ошондуктан

$$\det\left\|\sum_a\gamma^{ik}b_{kj}^a y^a-\delta_j^i\right\|=0 \tag{8}$$

Бул болсо p-даражалуу алгебралык теңдеме болот жана ал $N_q(X)$ тегиздигинде алгебралык гипербетти аныктайт $\tilde{V}_{q-1}(X)$. Бул гипертегиздик y чекити аркылуу өтпөйт. Бул теңдемени биринчи жолу Д.И. Перепелкин аныктаган жана аны *“К-көптүспөлдүүлүгү”* деп атаган.

Ушул *“К-көптүспөлдүүлүгүн”* V_p бетине “бириктирилген бет” деп аташат жана аны $\tilde{V}_{q-1}$ аркылуу белгилейбиз (p-тартиптеги бет болот).

Эми $p=3,\ n=p+3$ болгон учурда карайлы.

$\left\{\vec{e}_i\right\}=\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\vec{e}_3\right\}$ базиси $T_3(X)$ мейкиндигинде ортонормаланган базис болсун деп эсептесек, анда (2.2.5) теңдемеси төмөндөгүй көрүнүшкө келет:

$$\left(b_{11}^4+b_{22}^4+b_{33}^4\right)\left(y^4\right)^2+\left(b_{11}^5+b_{22}^5+b_{33}^5\right)\left(y^5\right)^2+\ldots+ \tag{9}$$
$$+\left(b_{11}^q+b_{22}^q+b_{33}^q\right)\left(y^q\right)^2-3=0$$

Аркыркы теңдемеден төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз: E_{p+3} мейкиндигинде V_3 бетине “бириктирилген” бет экинчи тартиптеги конус боло албайт.

Эгерде $\sum_i b_{ii}^a>0$ болсо (бардык a үчүн), анда (2.2.6) теңдемеси эллипсоидди аныктайт.

Эгерде $\sum_i b_{ii}^a$ коэффициенти a индексинин S даана маанилери үчүн оң мааниге, ал эми t даана маанилери үчүн ($s+t=a$) терс мааниге ээ болсо, анда (2.2.6) теңдемеси $N_q(X)$ мейкиндигинде t индекстүү гиперболаны аныктайт.

Ошентип, төмөндөгүдөй теорема далилденди

Теорема. E_{p+3} мейкиндигинде V_3 бетине “бириктирилген” бет

а) экинчи тартиптеги конус боло албайт;

б) $\sum_i b_{ii}^s > 0, \sum_i b_{ii}^t > 0$ ($s+t=a$) болгон учурда t индекстүү гипербола болот.

Жыйынтык

Теорема. E_{p+3} мейкиндигинде V_3 бетине “бириктирилген” бет:

а) экинчи тартиптеги конус боло албайт;

б) $\sum_i b_{ii}^s > 0, \sum_i b_{ii}^t > 0$ ($s+t=a$) болгон учурда t индекстүү гипербола болот.

Ошондой эле төмөндөгү теңдеме

$$\left(b_{11}^4+b_{22}^4+b_{33}^4\right)\left(y^4\right)^2+\left(b_{11}^5+b_{22}^5+b_{33}^5\right)\left(y^5\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(b_{11}^q+b_{22}^q+b_{33}^q\right)\left(y^q\right)^2-3=0$$

а) эгерде $\sum_i b_{ii}^a > 0$ болсо (бардык a үчүн) эллипсоидди аныктайт;

б) эгерде $\sum_i b_{ii}^a$ коэффициенти a индексинин S даана маанилери үчүн оң мааниге, ал эми t даана маанилери үчүн ($s+t=a$) терс мааниге ээ болсо, анда $N_q(X)$ мейкиндигинде t индекстүү гиперболаны аныктай тургандыгы келтирилип чыгарылды.

Адабияттар тизмеси:

1. **Базылев, В.Т.** О многомерных сетях и преобразованиях [Текст] / В.Т. Базылев // Итоги науки. Геометрия. – М.: АН СССР, ВИНИТИ, 1965. – С. 138-164.
2. **Базылев, В.Т.** Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств [Текст] / В.Т. Базылев // Ученые записки.– М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1970. - №374. – С. 28-40.
3. **Базылев, В.Т.** О одном аддитивном представлении тензора Риччи *p*- поверхности евклидова пространства [Текст] / В.Т. Базылев // Сибирский математический журнал, Т.3. – Москва, 1966. – С. 499-511.
4. **Есин, В.А.** К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1980 – С. 29-32.
5. **Есин, В.А.** О поверхностях корезмернорсти два [Текст] / В.А. Есин // Геометрия погруженных многообразий. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1981 – С. 40-44.
6. **Еврос, П.И.** О поверхностях коразмерное при евклидова пространства [Текст] / П.И. Еврос // Геометрия погруженных многообразии. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1986 – С. 26-30.
7. **Абдуллаева, Ч.Х.** О существовании неподвижных прямых в частичном отображении трехмерного евклидова пространства [Текст] / [Ч.Х. Абдуллаева, Жамшитбек к. К., О.М. Кенжаев] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №1. – С. 31– 35.
8. **Абдуллаева, Ч.Х.** Необходимое и достаточное условия неподвижности координатных прямых в частичном отображении трехмерного евклидова пространства [Текст] / [Ч.Х. Абдуллаева, Жамшитбек к. К., Элчибек у.К.] // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУУ, 2019. – №1. – С. 35– 40.

DOI:10.54834/16945220_2022_2_49

Поступила в редакцию 08. 04. 2022 г.