3. Simpleshow [Электронный ресурс]. Welcome to the world of simple explanation. – Режим доступа: http://simpleshow.com/blog/visual-versus-text/. – Загл. с экрана.
4. **Шахно, К.У.** Сборник задач по математике повышенной трудности [Текст] / К.У. Шахно. – Москва, 2012.
5. **Бабаев, Д.** Санариптештирүү шартында техникалык жождордогу жалпы физика курсунун орду [Текст] / Д. Бабаев, Ш. Хаитов, А. Халматов // Alatoo Academic Studies. – 2020. - № 3. – С. 84-89.
6. **Халматов, А.А.** Компетентсностный подход при решении двойных интегралов (на примере математического пакета Mathcad) [Текст] / А.А. Халматов, Ш.К. Хаитов. – Ош, 2016.
7. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Труды международной научной конференции посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского университета. – Ош, 2014. – Вып. 4. – С. 119-121.
8. **Халматов, А.А.** Обобщенный метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка [Текст] / А.А. Халматов // Наука. Образование. Техника. – Ош, КУУ. – 2019. - № 3 (66). – С. 23-27.
9. **Халматов, А.А.** Сингулярдуу козголгон өзгөчө ийриси бар айрым туундулуу теңдеменин асимптотикасын тургузуу [Текст] / А.А. Халматов, Н.А. Нишанбаева, А. Абсатар к. // Наука. Обоазование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - № 3 (72). – С. 29-33.
10. **Халматов, А.А.** Сингулярдуу-козголгон өзгөчө чекити бар сызыктуу эмес экинчи тартиптеги теңдеменин чечиминин асимптотикасын тургузуу [Текст] / А.А. Халматов, А.А. Балтабаев, Г. Каныбек к. // Наука. Обоазование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - № 3 (72). – С. 34-40.

DOI:10.54834/16945220_2022_3_5

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

УДК 517.926

Халматов А.А.
к.ф-м.н., доц. Кыргызско-Узбекс. Межд. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика
Аббазова К.А.
преп. Кыргызско-Узбекского Межд. универ. им. Б.Сыдыкова, Кыргызская Республика
Каныбек к. Г.
магистрант Ошского государ. универ., Кыргызская Республика
Балтабаев А.
магистрант Ошского государ. универ., Кыргызская Республика

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМИН ЖАЛГАШТЫРУУ

Бул жумушта изилдөөнүн предмети болуп сингулярдуу козголгон Лайтхилл түрүндөгү дифференциалдык теңдеме болот. Изилдөөнүн максаты Лайтхилл түрүндөгү дифференциалдык теңдеменин чечимин жалгаштыруу. Чечимди жалгаштыруу эки метод: классикалык метод жана параметризациялоо методу аркылуу жүзөгө ашкан. Жалгаштыруу усулу үч этаптан туруп, анда сырткы ажратылуу боюнча чечим тургузулуп, ички ажратылуу боюнча да чечим тургузулуп, акырында чечимдер жалгаштырылды. Биринчи болуп бул методду Л.Прандтль ишке ашырган. Бул метод негизинен кичине параметрдү чоң туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн иштетилет. Чегаранын алыстыгында теңдеменин чечими акырындык менен өзгөрөт, формалдуу түрдө кичине мүчөлөрдү таштаб жибериш мүмкүн, анткени теңдеме төмөндөө тартипине ээ. Бул эсе тышкы чечимди ажратылышын билдирет. Чегаранын өзүндө болсо тескерисинче чечим тез өзгөрөт, башкы туундулар маанилүү болот. Тышкы жана ички ажратуулар бирдей чечимдин ар түрдү формалары болуп эсептелинет.

Негизги сөздөр: *сингулярдуу козголгон; ички чечим; сырткы чечим; жалгаштыруу; аналитикалык чечим; козголуулар теориясы; Тейлордун катары; аналитикалык функция.*

СРАЩИВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Предметом исследования является сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение Лайтхилла, целью исследования является сращивание решений модельного уравнения Лайтхилла. Метод *сращивания состоит из двух методов: классического метода и метода параметризации. Сам процесс сращивания состоит из трех этапов: нахождение внешнего решения, построение внутреннего решения и сращивание решений. Впервые этот метод ввел Л. Прандтль. Этот метод используется для уравнений с малым параметром при старшей производной. Вдали от границы решение меняется медленно, где формально можно отбросить малые члены, т.к. уравнение имеет пониженный порядок. У границы решение в отличие от внутреннего меняется быстро. Это же означает внешнее разложение. Здесь же важны старшие производные. Нужно знать, что внешнее и внутреннее решения это одно и тоже решение в различных формах.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенный, внутренне решение, внешнее решение, сращивание, аналитическое решение, теория возмущений, ряд Тейлора, аналитическая функция.*

SPICE OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

The subject of the research is the singularly perturbed differential equation of Lighthill, the aim of the research is the splicing of solutions of the model Lighthill equation. The splicing method consists of two methods: the classical method and the parameterization method. The splicing process itself consists of three stages: finding an external solution, building an internal solution, and splicing solutions. This method was first introduced by L. Prandtl. This method is used for equations with a small parameter at the highest derivative. Far from the boundary, the solution changes slowly, where formally small terms can be discarded, since the equation is of reduced order. At the border, the decision, unlike the internal one, changes quickly. This also means external decomposition. The senior derivatives are also important here. You need to know that external and internal solutions are one and the same solution in different forms.

Key words: *singularly perturbed, internal solution, external solution, splicing, analytical solution, perturbation theory, Taylor series, analytical function.*

Төмөнкү Лайтхилл түрүндө маселени

$$(x+\varepsilon y(x))\frac{dy(x)}{dx}+y(x)+\varepsilon y^2(x)=0 \tag{1}$$

$$y(1) = 1, \tag{2}$$

карайбыз, мында $0 < \varepsilon << 1$ – кичине параметр $x \in [0,1]$. Бул сингулярдуу козголгон маселе, себеби ε = 0 десек, анда (1) теңдеме

$$ly_0(x)=x\frac{dy_0}{dx}(x)+y_0(x)=0. \tag{3}$$

Мында $x = 0$ чекити өзгөчө чекит жана (3) түн чечими

$$y_0(x) = x^{-1}, \tag{4}$$

$x = 0$ чекитинде чексизге айланат. Эгерде (1) дин чечимин (тышкы)

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots, \tag{5}$$

түрүндө издесек, анда

$$ly_1(x)=-y_0(x)\frac{dy_0(x)}{dx}+{y_0}^2, \qquad y_1(1)=0, \tag{6.1}$$

$$ly_2(x)=-y_0(x)\frac{dy_1(x)}{dx}-\frac{dy_0(x)}{dx}y_1(x)-2y_0(x)y_1(x), \tag{6.2}$$

$$ly_2(x)=-y_0(x)\frac{dy_2(x)}{dx}-y_1(x)\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_0(x)}{dx}y_2(x)-2y_0(x)y_2(x)+y_0^2(x), \tag{6.3}$$

(6.1) маселе

$$ly_1(x) = x^{-3} + x^{-2} \sim x^{-3},\ x \to 0.$$

Мындан

$$y_1(x) \sim -\frac{1}{2}x^{-3},\ x \to 0$$

.

Эми $y_2(x)$ – ти аныкталган (6.2)

$$ly_2(x) \sim -\frac{13}{x2}x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-3}(-\frac{1}{x^2}) = 2x^{-5}, \quad x \to 0.\cdot$$

Мындан

$$ly_2(x) \sim -\frac{1}{2}x^{-5},$$

ушундай эле жол менен

$$y_m(x) \sim a_m x^{-2m-1},\ x \to 0, \tag{6m}$$

экендигин көрсөтө алабыз. Демек, (5) чечим

$$y(x) \sim \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon x^{-2} + \frac{1}{2}(\varepsilon x^{-2})^2 + \cdots + a_m(\varepsilon x^{-2})^2 + \cdots\right]. \tag{7}$$

Бул катар $x \in (\varepsilon^a,\ 1]$, мында $2 = \frac{1^{x\to 0}}{2}$ аралыгында гана асимптотикалык катар болот, $x_0 = \sqrt{\varepsilon}$ – катардын өзгөчө чекити.

Андан ары чечимди табуу үчүн

$$x = \mu t\ (\mu = \sqrt{\varepsilon}), \tag{8.1}$$

$$y = \frac{1}{\mu}U(t), \tag{8.2}$$

деген өзгөртүү кийиребиз. Анда (1) теңдеш мында t – ички өзгөртүүчү, $u(t)$ – ички чечим деп аталат.

$$\left(\mu t + \mu^2\frac{u(t)}{\mu}\right)\frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}u(t) + \varepsilon\frac{1}{\mu^2}u^2(t) = 0 \Rightarrow (t + u(t))\frac{du}{dt} + u(t) + +\mu u^2(t) = 0.. \tag{9}$$

Бул теңдеменин чечимин

$$u(t) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \cdots, \tag{10}$$

түрдө издейбиз. Анда белгисиз $u_k(t)(k = 0,1,\ \ldots\ ,)$ үчүн төмөндөгүдөй теңдемелерди алабыз

$$(t + u_0(t))\frac{du_0}{dt} + u_0(t) = 0, \tag{11.1}$$

$$(t + u_0(t))\frac{du_1(z)}{dt} + u_0\frac{d_1 u_1}{dt} + u_1(z) + u_0^z(z) = 0, \tag{11.2}$$

(11.1) дин чечими $\frac{d}{dt}\left[tu_0 + \frac{1}{2}u_0^z\right] = 0 \Rightarrow$

$$u_0(t) = -t \pm \sqrt{t^2 + C_0}. \tag{12}$$

Мында тамырдын алдындагы белги жана C_0 турактуусу тышкы чечим менен жалгаштыруудан аныкталат.

(7) нин (1) чи мүчөсүнөн

$$y(x) \sim \frac{1}{\mu} U(t) \sim \frac{1}{\mu t} \Rightarrow u \sim \frac{1}{t}, \tag{13}$$

(8.2) ден

$$\mu y \sim -\frac{x}{\mu} \pm \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon} + C_0} \Rightarrow$$

$$y \sim \frac{1}{\varepsilon}\left[-x \pm \sqrt{x^2 + \varepsilon C_0}\right] \sim \frac{1}{\varepsilon}\left[-x \pm x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{C_0}{x^2}\right)\right], \tag{14}$$

бул (13) менен жалгашат, эгерде (14) төн + белгисин алып $C_0 = 2$ десек, демек

$$u_0(t) = -t + \sqrt{t^2 + 2}. \tag{15}$$

Эми

$$u(t,\varepsilon) = -t + \sqrt{2 + t^2} + \sqrt{t}\left\{\frac{2}{t}\left(2 + t^2\right) - \frac{2t\left(3 + t^2\right)}{3\sqrt{2 + t^2}}\right\}.$$

Мында $t=0$ десек, анда

$$u(0,\varepsilon) \sim \sqrt{2} + \sqrt{4\varepsilon},$$

же

$$y(0,\varepsilon) \approx \sqrt{2/\varepsilon} + \frac{4}{3}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Демек, биз чечимдин биринчи асимптотикасын алдык.

(1) үчүн биз чечимди параметрлештирүү усулун колдонуп бардык жакындаштырууларды алабыз.

$$\left(ìììà\ (\ )\right)\frac{dy}{dx} = -\ (\ ) - \varepsilon^2\ {}^2(\ ),\ (1) = 1 \tag{16}$$

Мында t параметр кийиребиз, б.а. (16) ордуна

$$\begin{cases} t\dfrac{dy}{dt} = -dy(t) - \varepsilon^2 y^2(t), y(1) = 1, \\ t\dfrac{dx}{dt} = x + \varepsilon y(t), x(1) = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Эгерде (17) биринчи теңдемесин экинчисине баштапкы шартты койсок, мында

$$\eta = \eta(\varepsilon), \eta(\varepsilon) > 0, \eta(\varepsilon) dy,$$

кийин табабыз.

(17) нин чечими

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + ...,$$
$$x(t) = t + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ... \tag{18}$$

(18)ди (17)ге коюп y_0, y_1, y_2, ... , x_0, x_1, x_2, ... функциялары үчүн төмөнкү теңдемелерди алабыз:

$$t\frac{dy_0}{dt} = -dy_0(t), y_0(1) = 1, \tag{19}$$

$$Ly_1 := t\frac{dy_1}{dt} + dy_0(t) = 0,\ y_1(1) = 0, \tag{19.1}$$

$$t\frac{dx_1}{dt} = x_1 + y_0(t), x_1(1) = 0, \tag{20.2}$$

$$Ly_2 := -y_0^2(t),\ y_2(1) = 0, \tag{19.2}$$

$$t\frac{dx_2}{dt} = y_1, x_2(1) = 0, \tag{20.3}$$

$$Ly_3 := -2y_0y_2,\ y_3(1) = 0, \tag{19.3}$$

$$t\frac{dx_3}{dt} = y_2, x_3(1) = 0. \tag{20.4}$$

(19) маселенин чечими

$$y_0(t) = \frac{1}{t^2},$$

(19.1)дин чечими

$$y_1(t) = 0,$$

(20.2)нин теңдемеси

$$t\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{1}{t^2}, x_2(1) = 0,$$

түрүндө жазылат. Мунун чечими

$$x_1 = t\int_1^t \frac{1}{s^\alpha} ds = t\left[\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]\Bigg|_1^t = \frac{t^{2-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{t}{\alpha^2} \approx \frac{t^{2-\alpha}}{1-\alpha}, t \to 0.$$

Демек,

$$x_1 \approx \frac{t^{2-\alpha}}{1-\alpha}, (t \to 0),$$

(19.2) теңдемеси

$$Ly_2 := - t^{-2a},\ y_2(1) = 0,$$

Мындан

$$y_2(t) = t^{-\alpha}\int_1^t \frac{1}{s} s^{-2a} ds = t^{-2\alpha}\int_1^t s^{-1-2\alpha} ds =$$

$$= t^{-\alpha}\frac{-1}{2\alpha} s^{1-2\alpha}\Big|_1^t = \frac{t^{-3\alpha}}{2\alpha} + \frac{t^{-2\alpha}}{2\alpha},$$

x(t)нин 1-2-мүчөлөрүн

$$x(t) = t + \frac{\varepsilon t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(\varepsilon),$$

анда, $x=0$ чекитине $t = \xi$ чекити туура келет десек

$$\xi = \frac{t^0 \xi^{-\alpha}}{\alpha - 1} \Rightarrow \xi^{1+\alpha} = \frac{\xi}{\alpha - 1} \Rightarrow \xi = \left(\frac{\xi}{\alpha - 1}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} > 0.$$

Демек,

$$x(t) + \varepsilon y(t) = t + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon y_1(t) =$$

$$= t + \varepsilon\left(\frac{t^{2-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = t + \varepsilon\frac{t^{2-\alpha}}{1-\alpha} = 0,$$

анда теңдеменин чечими жок. Демек, (16) жана (17) теңдемелер эквиваленттүү теңдемелер болуп, x=0 гө

$$y(0) \approx \frac{1}{\xi^\alpha} = \left(\frac{\xi}{\alpha - 1}\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

чекити туура келет.

Жыйынтыктар:

1. Лайтхиллдин түрүндөгү моделдик теңдеме үчүн классикалык метод менен асимптотикалык чечими тургузулду.

2. Лайтхиллдин түрүндөгү моделдик теңдеме үчүн параметрлештирүү методу менен асимптотикалык чечими тургузулду.

3. Тышкы жана ички чечимдер жалгаштырылды.

Адабияттар тизмеси:

1. **Халматов, А.А.** Обобщенный метод погранфункций для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка [Текст] / А.А. Халматов // Наука. Образование. Техника. – Ош, КУУ. – 2019. - № 3 (66). – С. 23-27.
2. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда решение невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке [Текст] / А.А. Халматов // Известия Ошского технологического университета. – Ош, 2018. - № 1-1. – С. 177-180.
3. **Халматов, А.А.** Метод продолжения для модельного уравнения Лайтхилла первого порядка с регулярной особой точкой [Текст] / А.А. Халматов, К. Алымкулов // Труды международной научной конференции посвященной 20-летию образования Кыргызско-Узбекского университета. – Ош, 2014. – Вып. 4. – С. 119-121.
4. **Tursunov, D.A.** Asymptotics of the solution to the boundary-value problems with non smooth coefficient [Text] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, A.A. Halmatov// Lobacevskii Journal of Mathmatics. – 2020. – T.41. - № 6. – Pp. 1115-1122.
5. **Tursunov, D.A.** Singulary Perturbed Ordinary Differential equation with turning point and interior layer [Text] / D.A. Tursunov, Z.M. Sulaimonov, A.A. Khalmatov // Lobacevskii Journal of Mathmatics. – 2021. – T. 42. - № 12. – Pp. 3016-3021.
6. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point [Text] / K. Alymkulov, A.A. Khalmatov // Mathematical Notes. – Moscow, 2012. – № 6. – Pp. 117–121.
7. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill [Text] / K. Alymkulov, K.B. Matanova, A.A. Khalmatov // International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) – 2015. – Volume 3. – Pp. 54-64.
8. **Халматов, А.А.** Сингулярдуу козголгон өзгөчө ийриси бар айрым туундулуу теңдеменин асимптотикасын тургузуу [Текст] / А.А. Халматов, Н.А. Нишанбаева, А. Абсатар к. // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - № 3 (72). – С. 29-33.
9. **Халматов, А.А.** Сингулярдуу-козголгон өзгөчө чекити бар сызыктуу эмес экинчи тартиптеги теңдеменин чечиминин асимптотикасын тургузуу [Текст] / А.А. Халматов, А.А. Балтабаев, Г. Каныбек к. // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. - № 3 (72). – С. 34-40.

DOI:10.54834/16945220_2022_3_57

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.