УДК 517.928

Алыбаев К.С.
д.ф.-м.н., проф. Джалал-Абадского гос. универ. им. Б. Осмонова, Кыргызская Республика
Мусакулова Н.К.
преп. Джалал-Абадского гос. университета им. Б. Осмонова, Кыргызская Республика

КОМПЛЕКСТИК АЙМАКТАРДА ИРРЕГУЛЯРДЫК КУБУЛГАН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН СЫЗЫКТУУ ТЕНДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН АЖЫРАТУУ

Бул жумушта изилдөөнүн предмети болуп иррегулярдык кубулган сингулярдык козголгон сызыктуу теңдемелердин комплекстик аймактарда каралышы эсептелинет. Изилдөөнүн максаты - комплекстик аймактарда иррегулярдык кубулган сингулярдык козголгон сызыктуу тендемелердин чечимдерин ажыратуу. Мурунку изилдөөлөр көрсөткөндөй, каралып жаткан аймактардын айрым бөлүктөрүндө сингуллярдык козголгон теңдемелердин чечимдери ар кандай асимптотикалык өзгөрүү мүнөзгө ээ. Теңдеменин чечимдерин, каралып жаткан аймактардын бир бөлүгүндө үстөмдүү боло тургандай, бир нече түзүүчү функцияларга ажыратуу мүмкүнчүлүгү жөнүндө маселе коюлган. Бул эмгекте бул маселени чечүү үчүн комплекстүү областагы тиешелүү козголбогон теңдеменин чечими жөнөкөй полюска ээ болгон сингулярдуу козголгон биринчи даражадагы сызыктуу теңдеме каралган. Белгисиз функцияны алмаштыруу менен каралып жаткан теңдеменин баштапкы маселесин чечүү үч функциянын суммасы катары көрсөтүлгөн. Гармоникалык функциялардын деңгээл сызыгын колдонуу менен аймак бир нече бөлүккө бөлүнөт. Уюлдун чекебели аныкталган жана бул чекебел каралып жаткан аймактан алынып салынган. Уюлга ээ болгон функция уюлга жетишерлик жакын (кичинекей периметр боюнча) жакындашына жол бербей турганы, функциялардын бири чек ара-катмар сызыктарын жана аймактарды, ал эми үчүнчү функция регулярдуу аймактарды (мында сингулярдуу козголгон теңдеменин чечими козголбогон теңдеменин чечимине умтулат) жана уюлдун таасири астында чек ара катмар сызыктарынын жаңы түрүн аныктайт.

Негизги сөздөр: *деңгээл сызыгы; чек ара катмар сызыгы; чек ара катмар аймагы; регулярдык жана сингулярдык аймак.*

РАСЩЕПЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИРРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

В данной работе предметом исследования является иррегулярно вырожденные линейные сингулярно возмущенные уравнения в комплексных областях. Цель исследования - расщепление решений иррегулярно вырожденных линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Как показывают ранее проведенные исследования, асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений в различных частях рассматриваемых областях имеют различный характер изменений. Естественно возникает задача о возможности расщепления решения на несколько составляющих функций так, чтобы каждая из этих функций была доминирующей в одном из рассматриваемых частей. В данной работе для решения этой задачи рассмотрено линейное сингулярно возмущенное уравнение первого порядка в комплексной области, решение соответствующего невозмущенного уравнения, которой имеет простой полюс. Путем *замены неизвестной функции, решение начальной задачи рассматриваемого уравнения представлена в виде суммы трех функций. С использованием линии уровней гармонических функций область разделена на несколько частей. Определена окрестность полюса и эта окрестность исключена из рассматриваемой области. Выяснено, функция имеющая полюс не позволяет достаточно близко (по малому периметру) приблизится к полюсу, одна из функций определяет погранслойные линии и области, а третья функция определяет регулярные области (где решение сингулярно возмущенного уравнения стремится к решению невозмущенного уравнения) и под влиянием полюса определяет новый вид погранслойных линий.*

Ключевые слова: *линия уровня; погранслойная линия; погранслойная область; регулярная и сингулярная область.*

SPLITTING SOLUTIONS TO IRREGULARLY DGENOUS LINEAR SINGULARLY PERTURBATE EQUATIONS IN COMPLEX AREAS

This article considers irregularly degenerate linear singularly perturbed equations in complex domains.As shown by previous studies, the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations in different parts of the considered domains has a different character of changes. Naturally, the problem arises of the possibility of splitting the solution into several component functions so that each of these functions is dominant in one of the considered parts. To solve this problem, in this article we consider a linear singularly perturbed first-order equation in the complex domain, the corresponding unperturbed equation, which has a fixed pole. By replacing the unknown function, the solution of the initial problem of the considered equation is presented as a sum of three functions. Using the level line of harmonic functions, the area is divided into several parts. The neighborhood of the pole is determined, and this neighborhood is excluded from the region under consideration. It was found out that a function having a pole does not allow close enough (along a small perimeter) to approach the pole, one of the functions determines boundary-layer lines and regions, and the third function determines regular regions (where the solution of the singularly perturbed equation tends to the solution of the unperturbed equation) and under the influence of the pole determines a new kind of boundary layer lines.

Key words: *feature level line; boundary layer line; boundary layer region; regular and singular region.*

Постановка задачи

Исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями в комплексных областях показывают, что решения в частях рассматриваемых областях, имеют различный характер изменения [1]. К примеру, существуют: некоторые линии вдоль которых решение не имеет предела по малому параметру; области, где решения имеют предел (стремятся к решениям невырожденных уравнений); области, где решения не имеют предела.

Возникает задача: можно ли расщепить решение сингулярно возмущенных уравнений на несколько составляющих так, чтобы каждая из этих составляющих была доминирующей в рассматриваемых частях.

Объект исследования

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + b(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ - малый вещественный параметр;

$t \in D \subset C$ – множество комплексных чисел, а D- односвязная, открытая, ограниченная область, $t_0 \in D$.

Пусть выполняются условия:

I. $a(t), b(t) \in Q(D)$ – пространство аналитических функций в D.

II. $\exists!\ a \in D \wedge a \neq t_0\ (a(a)) = 0,\ a'(a) \neq 0,\ b(a \neq 0)$

В (1) пологая $\varepsilon = 0$ получим невозмущенное уравнение

$$a(t)\xi(t) + b(t) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет единственное решение

$$\xi(t) = -\,b(t)/a(t).$$

Если учесть условие I, то функция $\xi(t)$ в точке $t = a$ имеет простой плюс.

Ранее такие случаи не рассматривались.

В (1) произведем замену

$$x(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) + \xi(t), \tag{4}$$

где $y(t, \varepsilon)$ – новая неизвестная функция. (4) подставляя в (1) имеем

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) = a(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon\xi'(t), \tag{5}$$

где $\xi' = (a(t)b'(t) - a'(t)b(t))/a^2(t)$.

Функция $a(t)$ в области D представляется в виде $a(t) = (t - a)a_0(t)$, $a_0(a) \neq 0$. Введем обозначе ние

$(a(t)b'(t) - a'(t)b(t))/a_0(t) \equiv b_0(t),\ b_0(a) \neq 0.$

Теперь (5) можно представить в виде

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = a(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon\frac{b_0(t)}{(t-\alpha)^2} \tag{6}$$

с начальным условием $y(t_0,\varepsilon) = y^0 \equiv x^0 - \xi(t_0)$.

Согласно I $b_0(t) \in Q(D)$.

В уравнении (6) произведем замену неизвестной функции

$$y(t,\varepsilon) = \Pi(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon), \tag{7}$$

где $\Pi(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)$ –новые неизвестные функции. (7) подставляя в (6) имеем следующую систему уравнений:

$$\varepsilon\Pi'(t,\varepsilon) = \Pi(t,\varepsilon)a(t),$$
$$\Pi(t_0,\varepsilon) = y^0. \tag{8}$$

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\frac{b_0(t)}{(t-\alpha)^2},$$
$$z(t_0,\varepsilon) = 0. \tag{9}$$

Таким образом решение задачи (1)-(2) расщепелена на функцию $\xi(t)$ и систему уравнений (8)-(9). Решения задач (8)-(9) можно представить в виде (для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\Pi = y^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$z = \int_{t_0}^{t}\frac{b_{0(\tau)}}{(\tau-\alpha)^2}exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{11}$$

где $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$.

Сначала рассмотрим функцию (10). Прежде чем исследовать функцию (10), проведем некоторые построения. Рассмотрим функцию $ReA(t), ImA(t)$. Если учесть I, то $ReA(t)$ и $ImA(t)$ являются гармоническими функциями. По определению $A(t_0) = 0$ и $t_0 \neq \alpha$, тогда

$$\int_{t_0}^{\alpha} a(\tau)d\tau + \int_{\alpha}^{t} a(\tau)d\tau + \int_{t}^{t_0} a(\tau)d\tau = 0.$$

Отсюда имеем

$$\int_{t}^{t_0} a(\tau)d\tau = \int_{\alpha}^{t} a(\tau)d\tau - \int_{\alpha}^{t_0} a(\tau)d\tau.$$

Введем обозначение

$$A_0 = \int_{\alpha}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Тогда $\mathrm{A}(t) = A_0(t) - A_0(t_0)$.

$$A_0(\alpha) = 0, A_0'(\alpha) = a(\alpha) = 0, A_0''(\alpha) = a'(\alpha) \neq 0$$

Таким образом функция $A_0(t)$ в точке $t = \alpha$ имеет двухкратный ноль.

Определим линию уровня $(p_0) = \{t \in D, ReA_0(t) = 0\}$.

Известно [5], линией уровня (p_0), некоторая окрестность точки α разделяется на четыре части (рисунок 1).

Не ограничивая общности будем считать, что эта окрестность совпадает с *D*.

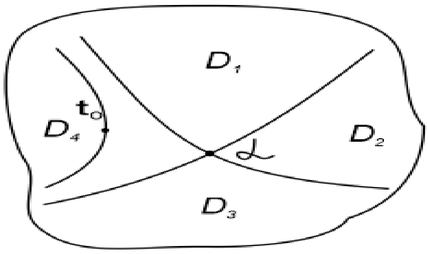

Рисунок 1 – Деление области *D* на части и линия (p_0)

Части области *D* обозначим D_1, D_2, D_3, D_4 (рисунок 1)

В каждом из этих частей функция $ReA(t)$ попеременно принимает положительные и отрицательные значения. Далее будем считать:

$$\forall t \in D_1 \ (ReA_0(t) \leq 0), \forall t \in D_2 \ (ReA_0(t) \geq 0),$$
$$\forall t \in D_3 \ (ReA_0(t) \leq 0), \forall t \in D_4 \ (ReA_0(t) \geq 0).$$

Справедливость этих соотношений будет доказана позже.

Рассмотрим случай, когда $\forall t \in D_0$ и $t_0 \notin (p_0)$. Линию уровня функции $ReA_0(t)$, проходящую через точку t_0 , обозначим $\big(p(t_0)\big)$,

$$\big(p(t_0)\big) = \{t \in D, ReA_0(t) = ReA_0(t_0) = \mathrm{p}(t_0) - const\} \text{ (рисунок 1).}$$

В области D_2 , также существует линия уровня $\big(p(T_0)\big)$, $T_0 \in D_2 \, p(T_0) = p(t_0)$. Это утверждение непосредственно следует из определения части D_2.

Область ограниченный линиями $p(t_0), p(T_0)$ обозначим $D_0 \subset D$. Определим линии уровня

$$(p_{1\varepsilon}) = \{t \in D_4, ReA_0(t) - ReA_0(t_0) = \varepsilon \ln \varepsilon\},$$
$$(p_{2\varepsilon}) = \{t \in D_2, ReA_0(t) - ReA_0(T_0) = \varepsilon \ln \varepsilon\}.$$

Область ограниченный линиями $\big(p(t_0)\big)$ и $(p_{1\varepsilon})$ обозначим $D_{1\varepsilon}$, а линиями $\big(p(T_0)\big)$, $(p_{2\varepsilon})$ обозначим $D_{2\varepsilon}$.

Введем обозначение $D_0 \backslash (D_{1\varepsilon} \cup D_{2\varepsilon}) = D_{01}$ (рисунок 2).

Далее считаем $(p_{1\varepsilon}) \notin D_{1\varepsilon}$, $(p_{2\varepsilon}) \notin D_{2\varepsilon}$.

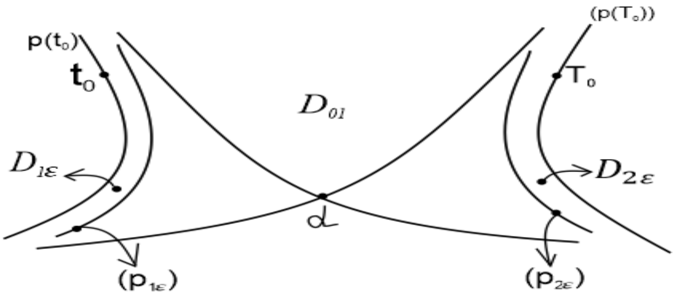

Рисунок 2 – Области $D_{1\varepsilon}, D_{2\varepsilon}, D_{01}$

Теперь проведем исследование функций $\Pi(t,\varepsilon)$ для
$t \in (p(t_0)), t \in (p(T_0)), t \in D_{1\varepsilon}, t \in D_{2\varepsilon}, t \in D_{01.}$ Пусть $t \in (p(t_0))$, тогда

$$\Pi(t,\varepsilon) = y^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} = y^0 exp\frac{A_0(t) - A_0(t_0)}{\varepsilon} = y^0 exp\frac{iIm(A_0(t) - A_0(t_0))}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует $\forall t \in (p(t_0))$ $\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi(t,\varepsilon) - \text{не существует, но } |\Pi(t,\varepsilon)| = |y^0|\right)$.

Аналогично $\forall t \in (p(T_0))$ $\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi(t,\varepsilon) - \text{не существует, но } |\Pi(t,\varepsilon)| = |y^0|\right)$.

Если $t \in D_{1\varepsilon} \cup D_{2\varepsilon}$, то $\varepsilon \ln \varepsilon < Re(A_0(t) - A_0(t_0)) \le 0$. Тогда, для этого случая, предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi(t,\varepsilon)$ –не существует, но $|\Pi(t,\varepsilon)| \le |y^0|$.

Пусть $t \in D_{01,}$ тогда $Re(A_0(t) - A_0(t_0)) \le \varepsilon \ln \varepsilon$ и $\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi(t,\varepsilon) = 0$.

На основании проведенных исследований можно сказать, что функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только на линиях $(p(t_0)), (p(T_0))$ и в областях $D_{1\varepsilon}, D_{2\varepsilon}$.

В области D_{01} функция $\Pi(t,\varepsilon)$ не существенна. Далее займемся функцией (11). Как и в предыдущем случае проведем некоторые построения. Рассмотрим область D_0. Поскольку функция (11) в точке $t = \alpha$ имеет особенность из области D_0 исключим малую окрестность точки α, не зависящую от ε. Определим линию уровня

$$(p_1) = \{t \in D_4, ReA_0(t) = p_1\}, (p_2) = \{t \in D_2, ReA_0(t) = p_2\},$$
$$(p_3) = \{t \in D_1, ReA_0(t) = p_3\}, (p_4) = \{t \in D_3, ReA_0(t) = p_4\}, \text{ (рисунок 3)}.$$

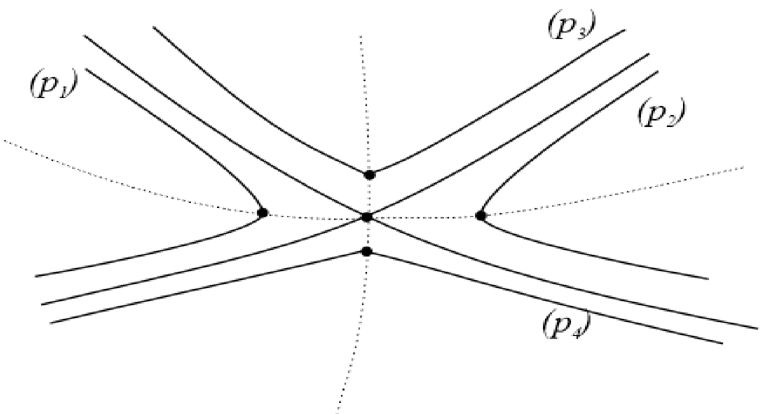

Рисунок 3 – Линии (p_j) $(j = 1, 2, 3, 4)$

Введем в рассмотрение линию уровня $(q_0) = \{t \in D, ImA_0(t) = 0\}$. Линия (q_0) в точке α разветвляется и область D разделяет на четыре части. Эти части обозначим $\Omega_j(j = 1, 2, 3, 4)$ (рисунок 4).

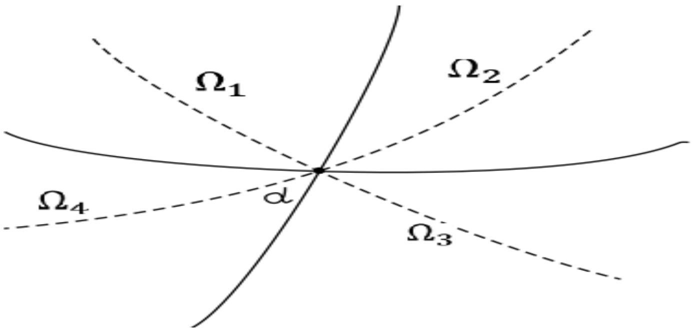

Рисунок 4 – Области $\Omega_j(j = 1, 2, 3, 4)$

На рисунке 4 пунктиром обозначены ветви линии уровня (p_0), а сплошные линии ветви линии уровня (q_0). Справедливость расположения ветвей линии уровней (p_0) и (q_0) вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть: 1. $F(t) \in Q(D)$. 2. $\exists!\ T_0 \in D\ \big(F(T_0) = 0, \dots, F^{(n-1)}(T_0) = 0, F^{(n)}(T_0) \neq 0\big)$.

При выполнении этих условий, переобразование $z = (t - T_0)\big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}}$, где $F(t) = (t - T_0)^n F_0(t), F_0(T_0) \neq 0,\ F_0(t) \in Q(D),\ \big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}} -$ любая однозначная непрерывная ветвь корня *n*-ной степени из $F_0(t)$;
некоторую окрестность точки T_0 локально взаимооднозначно и конформно отображает в круг плоскости *z* с центром в точке $(0; 0)$ и радиуса *r*.

Доказательство. Согласно условия 2 функция $F(t)$ в точке $t = T_0$ имеет *n* кратный нуль, тогда $F(t)$ можно представить в виде

$$F(t) = (t - T_0)^n F_0(t), F_0(T_0) \neq 0, F_0(t) \in Q(D).$$

Введем функцию $z(t) = (t - T_0)\big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}}$, где $\big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}} -$означает любую непрерывную однозначную ветвь корня *n*-ной степени из $F_0(t)$.

Преобразование осуществляемая функцией *z(t)*-локально взаимооднозначно и комформно в окрестности точки T_0.

Действительно, имеем

$$z'(t) = \big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}} + \frac{t - T_0}{n}\big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}-1}.$$

Отсюда $z'(T_0) = \big(F_0(t)\big)^{\frac{1}{n}} \neq 0$. Тогда$\forall\ t \in D(z'(t) \neq 0)$.

Имеем $F(t) = z^n, z(T_0) = 0$. Далее переходя к полярным координатам можем написать $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

Таким образом некоторая окрестность точки T_0 отображается в круг $|z| < r$, плоскости *z,* с центром в точке $(0; 0)$. Лемма доказана.

Линия уровня (p_0) в плоскости *z* определяется совокупностью лучей определяемых уравнением $\cos n\theta = 0$. Всего существуют *2n* лучей и каждый луч с соседним лучом образует угол равный $\frac{\pi}{n}$.

Аналогично линия уровня (q_0) в плоскости *z* определяется совокупностью *2n* лучей определяемых уравнением $\sin n\varphi = 0$. Каждый луч с соседним лучом образует угол равный $\frac{\pi}{n}$.

Возьмём две соседние лучи определяемые уравнением $\cos n\varphi = 0$. Угол образованный этими лучами обозначим α. Существует луч определяемый уравнением $\sin n\varphi = 0$, который является биссектрисой угла.

Таким образом на основании Леммы справедливость расположения ветвей линии уровня (p_0) и (q_0) доказана.

При *n=2* имеем функцию z^2. Полагая $z = z_1 + iz_2$ имеем $z^2 = z_1^2 - z_2^2 + +2iz_1z_2$. Отсюда в плоскости (z_1, z_2) имеем образы областей D_j и Ω_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ (рисунок 5).

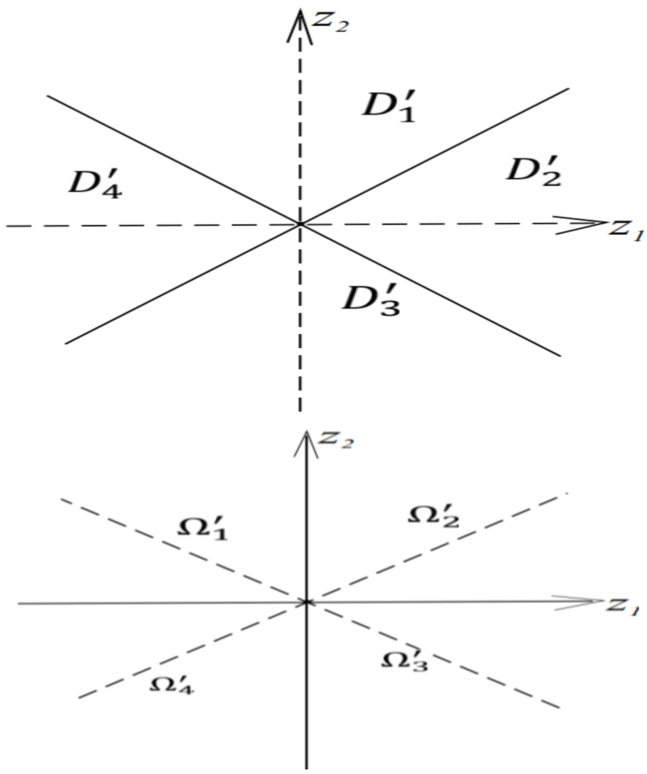

Рисунок 5 – Образы областей D_j, Ω_j $(j = 1, 2, 3, 4)$

Теперь нетрудно доказать справедливость следующих соотношений

$$\forall z \in D'_1 \cup D'_3\ (Rez^2 \leq 0), \forall z \in D'_2 \cup D'_4\ (Rez^2 \geq 0),$$
$$\forall z \in \Omega'_1 \cup \Omega'_3\ \ (Im^2 \leq 0), \forall z \in \Omega'_2 \cup \Omega'_4\ \ (Rez^2 \geq 0).$$

Тогда

$$\forall t \in D_1 \cup D_3\ (ReA_0(t) \leq 0), \forall t \in D_2 \cup D_4\ (ReA_0(t) \geq 0),$$
$$\forall t \in \Omega_1 \cup \Omega_3\ (ImA_0(t) \leq 0), \forall t \in \Omega_2 \cup \Omega_4\ (ReA_0(t) \geq 0).$$

Проведем линии уровня $(q_1) = \{t \in \Omega_1, ImA_0(t) = -q_1\}$,
$q_j (j = 1, 2, 3, 4)$ −достаточно малые числа, не зависящие от ε (рисунок 6).

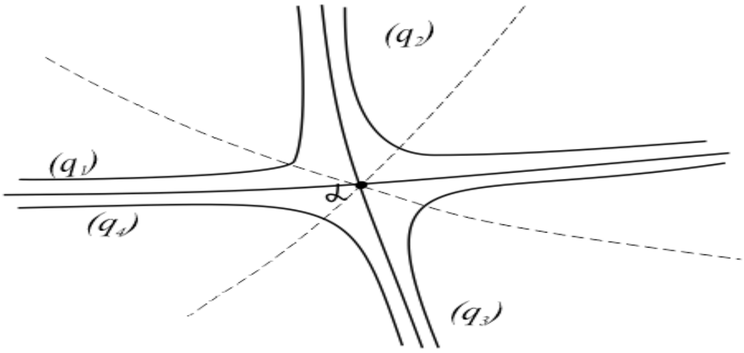

Рисунок 6 – Линии $q_j (j = 1, 2, 3, 4)$

Линия уровня (q_1) пересекается с $(p_1), (p_3)$, точки пересечения обозначим B_1, B_2. Линия (q_2) пересекается с $(p_3), (p_2)$ в точках B_3, B_4. Далее (q_3) пересекается с $(p_2), (p_4)$ в точках B_5, B_6. (q_4) пересекается с с $(p_4), (p_1)$ в точках B_7, B_8 (рисунок 7).

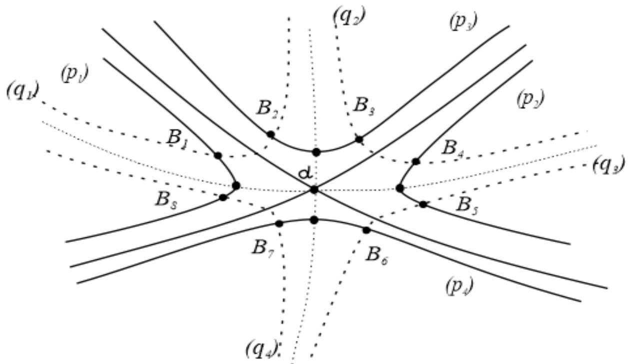

Рисунок 7 – Окрестность точки α

Получим замкнутую кривую $(B_1 B_2 \dots B_8) = (L_0)$. Область D_{00} −ограниченный (L_0) возьмём за окрестность точки α. Из области D исключим эту окрестность, т.е.,
$D \setminus D_{00} = D_{10}$, причем будем считать $(L_0) \in D_{10}$. По выбору
$p_j, q_j (j = 1, 2, 3, 4)$ −достаточно малые числа не зависящие от ε. Тогда окрестность D_{00} также будет достаточно малой.

Ислючение D_{00} можно обосновать так: В структуре решения задпчи (1)-(2) присутствует функция $\xi(t)$, которая в точке $t = \alpha$ имеет полюс. Если учесть предыдущие построения, то из области D_{01} исключается D_{00} т.е. $D_{01} \backslash D_{00}$ =D_{02}. Функцию (11) будем рассматривать в области $D_{03} = \big(p(t_0)\big) \cup D_{1\varepsilon} \cup D_{02} \cup D_{2\varepsilon} \cup \big(p(T_0)\big)$ (рисунок 3).

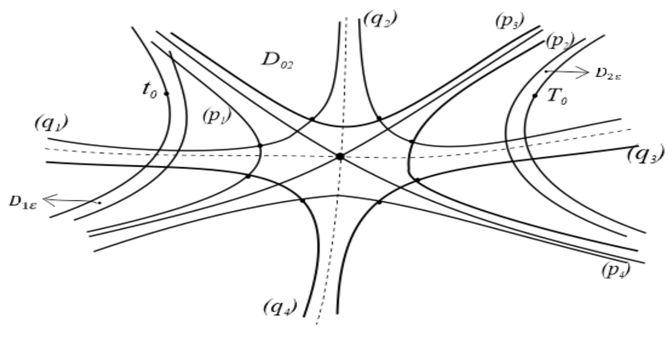

Рисунок 8 – Область D_{03}

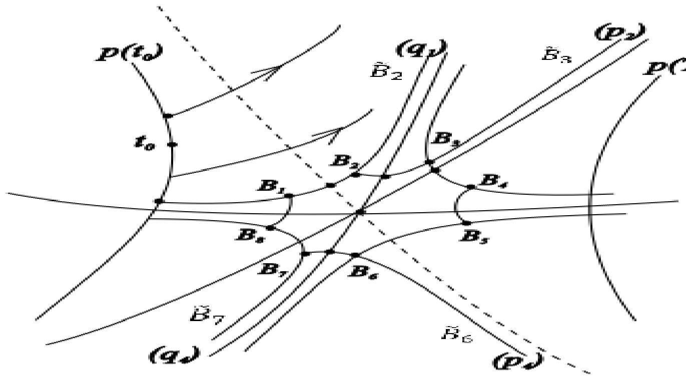

Рисунок 9 – Области D_{12}, D_{22}, D_{32}

Область ограниченный кривыми: $(p_1)[B_1, B_8], (q_1)[B_1, \tilde{B}_2], (q_1)[B_8, \tilde{B}_7]$ обозначим D_{12}; $(p_2)[B_2, \tilde{B}_3]$ и $(q_1)[B_2, \tilde{B}_2]$ обозначим D_{22}; $(q_4)[B_7, \tilde{B}_7]$ и $(p_4)[B_7, \tilde{B}_6]$ обозначим D_{32}. (рис. 9). В зависимости от принадлежности t к определенным областям выберем пути интегрирования.

Если: 1. $t \in D_{12,}$ то путь состоит из: $(p(t_0))[t_0, \tilde{t}]$ и $(\tilde{q}_1)[\tilde{t}, t]$.

2. $t \in D_{22}$, то $(p(t_0))[t_0, \tilde{t}_0], (q_1)[\tilde{t}_0, B_2], (p_2)[B_2, \tilde{\tilde{t}}], (\tilde{q}_2)(\tilde{\tilde{t}}, t)$.

3. $t \in D_{32}$, то $(p(t_0))[t_0, \tilde{\tilde{t}}_0], (q_4)[\tilde{\tilde{t}}_0, B_7], (p_4)[B_7, \tilde{\tilde{t}}], (\tilde{q}_2)[\tilde{\tilde{t}}, t]$ (рис. 9).

Согласно определенных путей интегрирования проведем оценку функции (11).

1. Пусть $t \in D_{12}$. Тогда из (11) имеем

$$z = \int_{p(t_0)} b_1(\tau) exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{(\tilde{q}_1)} b_1(\tau) exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (12)$$

В (12) $b_1(\tau) = b_0(\tau)/(\tau - \alpha)^2$. Функция $b_1(\tau)$ в рассматриваемых областях ограничена по модулю и особо не влияет на асимптотическое поведение функции $z(t, \varepsilon)$. Линии уровня $(p(t_0)), (\tilde{q}_1)$ аналитические кривые. Уравнения данных кривых представляя параметрически и к интегралам в (12) применяя интегрирование частям (при этом надо учесть, для $t \in (p(t_0))$ $(ReA(t) = 0,$ но не тождественно);
$t \in (\tilde{q}_1)$ $(ReA(t)$строго убывает) и переходя к модулю получим
$|z(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon, t \in D_{12}$. (13)

Здесь и далее буквами $M_1, M_2, \ldots$ обозначим постоянные не зависящие от ε.

Поступая также как и в случае 1 для оставщихся случаев имеем оценки:

2. $t \in D_{22}, |z(t, \varepsilon)| \leq M_2 \varepsilon$. (14)

3. $t \in D_{32}, |z(t, \varepsilon)| \leq M_3 \varepsilon$. (15)

После проведенных исследований возникает вопрос: Можно ли расширить границы (p_2), (p_4) соответственно областей D_{22}, D_{32}?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим кривую $(q_2)[B_3, B_4]$. Пусть $t \in (q_2)$. Рассмотрим функцию (11). Эту функцию представим в виде

$$\int_{p(t_0)} b_1(\tau) exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{(q_2)} b_1(\tau) exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (16)$$

где пути $p(t_0), (q_1), (p_2)$ выбираются как и в случае 2, а (q_2) $[B_3, t]$. В (16) проведем следующие преобразования:

$$\int_{p(t_0)} b_1(\tau) exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau == exp \frac{A(t) - A(\tilde{t}_0)}{\varepsilon} \int_{p(t_0)} b_1 exp \frac{A(\tilde{t}_0) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau;$$

$$\int_{(q_1)} b_1(\tau) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau == exp\frac{A(t)-A(\tilde{t}_1)}{\varepsilon}\int_{(q_1)} b_1(\tau)exp\frac{A(\tilde{t}_1)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau,$$

где $B_2(\tilde{t}_1)$;

$$\int_{(p_2)} b_1(\tau) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau == exp\frac{A(t)-A(\tilde{t}_2)}{\varepsilon}\int_{(p_2)} b_1(\tau)exp\frac{A(\tilde{t}_2)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau,$$

где $B_3(\tilde{t}_2)$.

Учитывая проведенные преобразования (16) представим в виде

$$z = exp\frac{A(t)-A(\tilde{t}_2)}{\varepsilon}\left[\int_{p(t_0)} b_1 exp\frac{A(\tilde{t}_2)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau + \int_{(q_1)} b_1(\tau)exp\frac{A(\tilde{t}_2)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{(p_2)} b_1(\tau)exp\frac{A(\tilde{t}_2)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right] + \int_{(q_2)} b_1(\tau)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$

В полученном равенстве, выражение содержащееся в скобке […], даёт значение функции $z(t,\varepsilon)$ в точке $B_3(\tilde{t}_2)$. Согласно (15) имеем

$$|z(\tilde{t}_2,\varepsilon)| \leq M_2\,\varepsilon.$$

Теперь полученное равенство можно записать в виде

$$z = exp\frac{A(t)-A(\tilde{t}_2)}{\varepsilon}\left[z(\tilde{t}_2,\varepsilon) + \int_{(q_2)} b_1(\tau)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right].$$

По кривой $(q_2)[B_3,B_4]$ функция $ReA(t)$ возрастает, тогда $Re\big(A(t)-A(\tilde{t}_2)\big) \geq 0$, а $Re\big(A(\tilde{t}_2)-A(\tau)\big) \leq 0$. Чем дальше *t* от $\tilde{t}$, знак равенства исчезает и $\left|exp\frac{A(t)-A(\tilde{t}_2)}{\varepsilon}\right|$ неограничена.

Таким образом $\forall t \in (q_2)(z(t,\varepsilon) \to \infty$ по $\varepsilon)$.

Область ограниченный кривыми $(p_2)[B_3,\tilde{B}_3], (q_2)[B_3,B_4], (p_3)[B_4,B_5], (q_3)[B_5,B_6], (p_4)[B_6,\tilde{B}_6]$ обозначим D_{04}. Аналогично $\forall t \in (q_3)[B_4,B_5](z(t,\varepsilon) \to \infty$ по $\varepsilon)$. Если $\forall t \in D_{04}$, то поступая также можно получить

$$\forall t \in D_{04}\ (z(t,\varepsilon) \to \infty). \qquad (17)$$

При этом будем считать, что кривые $(p_2),(q_2),(p_3),(p_3),(q_3),(p_4)$ не принадлежат области D_{04}.

Подведем итог проведенных исследований.

На основании оценок (13), (14), (15), (17) имеем

$$|z(t,\varepsilon)| \leq M_4\,\varepsilon, M_4 = max\{M_1,M_2,M_3\}, t \in D_{12},D_{22},D_{32} \qquad (18)$$

$$|z(t,\varepsilon)| \to \infty, t \in D_{04}, \qquad (19)$$

$$D_{12} \cup D_{22} \cup D_{32} \cup D_{04} = D_{03}.$$

Выводы:

1. Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon) = \xi(t) + \Pi(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon);$$

2. Область *D* разделена на части

$$\big(p(t_0)\big) \cup D_{1\varepsilon}, \big(p(t_0)\big) \cup D_{2\varepsilon}, D_{01};$$

3. Функция $\xi(t)$ в точке $t=\alpha$ имеет простой полюс и $\alpha \in D_{01}$. Из D_{01} исключена D_{00} − малая не зависящая окрестность точки α и введено обозначение $D_{02}=D_{01}\backslash D_{00}$. Границы D_{00} являются погранслойными линиями;

4. Функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только в областях $\big(p(t_0)\big)\cup D_{1\varepsilon}$ и $\big(p(\mathrm{T}_0)\big)\cup D_{2\varepsilon}$ и линии $\big(p(t_0)\big),\big(p(\mathrm{T}_0)\big)$ являются погранслойными, а $D_{1\varepsilon}, D_{2\varepsilon}$-погранслойные области;

5. Функция $z(t,\varepsilon)$ в области $D_{12}\cup D_{22}\cup D_{32}$ имеет порядок ε, α в D_{04} неограничена;

6. Функция $z(t,\varepsilon)$ под влиянием полюса определяет погранслойные линии $(p_3)[B_3,\tilde{B}_3],(p_4)[B_6,\tilde{B}_6]$.

Список литературы:

1. **Алыбаев, К.С.** Существование погранслойных линий для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Матер. II-й межд. конф., посвящ. 20-летию КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. – Бишкек: КРСУ, 2013. - С.83 – 88.
2. **Панков, П.С.** Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. [Текст] / П.С. Панков, К.С. Алыбаев, М.Р. Нарбаев, К.Б. Тампагаров // Вестник ОшГУ. – Ош, ОшГУ, 2013. - №1. - С. 227 - 231.
3. **Алыбаев, К.С.** Метод погранслойных линий построения регулярных и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями [Текст] / К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров // Естественные и математические науки в современном мире: сб. статей по материалам XLVII межд. научно-практ. конф. - Новосибирск: СиБАК, 2016. - №10 (45). - С. 59 - 66.
4. **Алыбаев, К.С.** Геометрическая теория сингулярно возмущенного уравнения Бернулли с точкой перевала [Текст] / К.С. Алыбаева, Ш.М. Матанов // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. – №3. – С. 40 - 49.
5. **Евграфов, М. А.** Аналитические функции [Текст] / М.А. Евграфов. - М.: Наука, 1968.-234 с.
6. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. - Москва: Наука, 1973. - 739 с.
7. **Федорюк, М.В.** Метод перевала [Текст] /М.В. Федорюк. - Москва: Наука, 1977.- 368с.
8. **Халматов, А.А.** Построение асимптотики решение сингулярно возмущенного уравнения в частных производныз с особой линией [Текст] / А.А. Халматов, Н. Нишанбаева, А.Абсатар к. // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. – №3. – С. 29 - 34.
9. **Халматов, А.А.** Построение асимптотики решение сингулярно-возмущенного нелинейного уравнения второго порядка с особой точкой [Текст] / А.А. Халматов, А.А. Балтабаев, Г. Каныбек к. // Наука. Образование. Техника. – Ош: КУМУ, 2021. – №3. – С. 34-40.

DOI:10.54834/16945220_2022_3_22

Поступила в редакцию 05.09.2022 г.

УДК 514.75

Матиева Г.

д.ф.-м.н., проф. Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

Абдуллаева Ч.Х.

к.ф.-м.н, доц. Кыргызско-Узбекского Межд.универ. им Б.Сыдыкова, Кырг. Республика

Нышанбаева Н.Т.

магистрант Ошского государственного университета, Кыргызская Республика

E_5 ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИГИНДЕ f_2^1 БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУСУНУН КВАЗИ-КОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫНЫН ЗАРЫЛ ЖАНА ЖЕТИШТҮҮ ШАРТТАРЫ